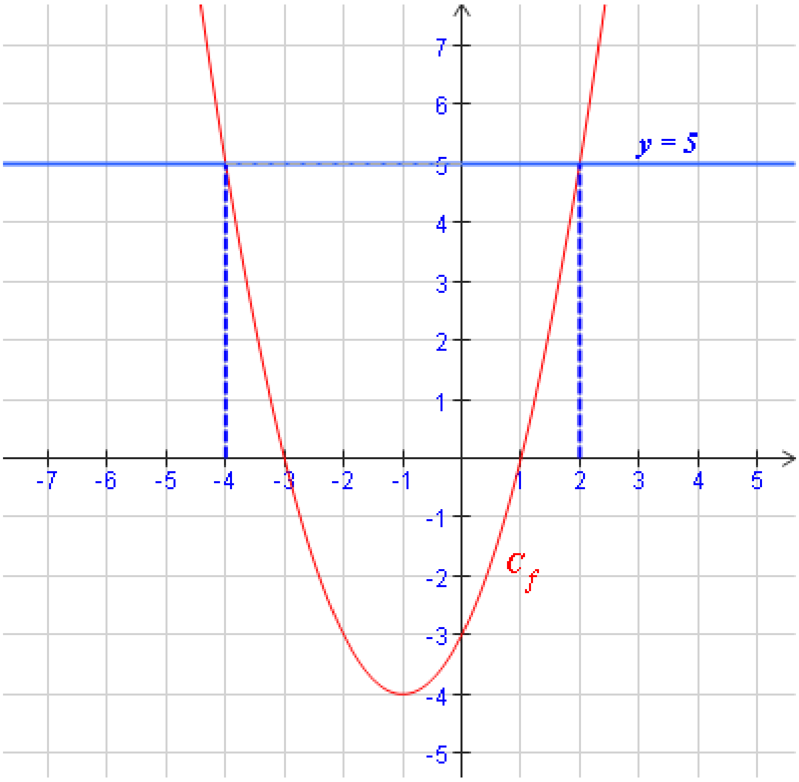
Exercice 139

1. a. $f(-1) = -4$.

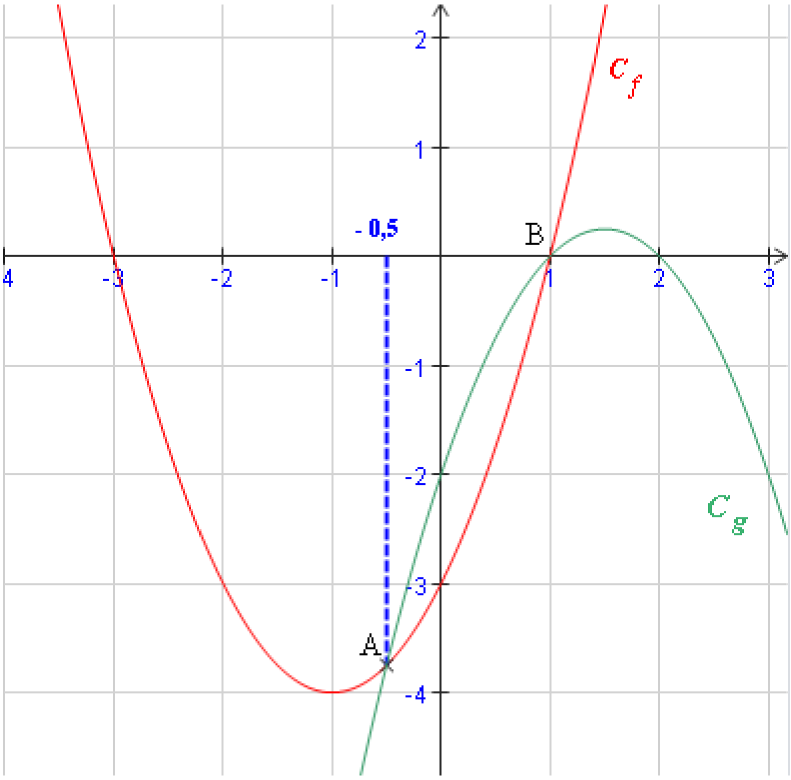
1. b. **Méthode** On utilise la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86 :
– on repère 5 sur l'axe des ordonnées ;
– on repère les points de la courbe C_f qui ont pour ordonnée 5 ;
– on lit leurs abscisses : ce sont les solutions.

Conseil
Pour trouver tous les points d'ordonnée 5 sur la courbe C_f, on peut tracer la droite d'équation $y = 5$ et repérer tous ses points d'intersection avec la courbe C_f.
On lit ensuite leurs abscisses : ce sont les solutions.



Les solutions de l'équation $f(x) = 5$ sont 2 et -4.

1. c. **Méthode** On utilise la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86.

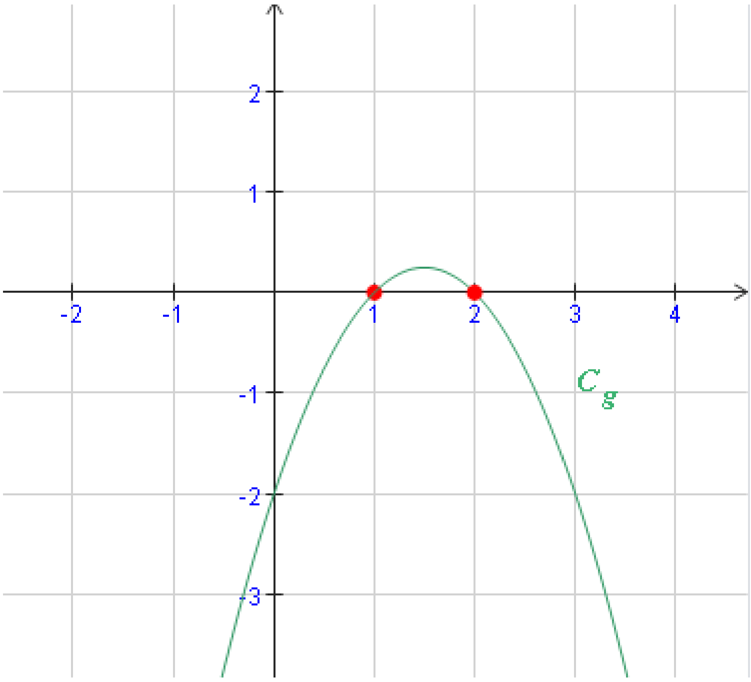


Conseil
Bien comprendre le raisonnement : le point d'abscisse x de C_f a pour coordonnées $(x\,;f(x))$.
Le point d'abscisse x de C_g a pour coordonnées $(x;g(x))$.
Dire que
$$f(x) = g(x)$$
c'est dire que ces deux points ont les mêmes coordonnées, donc qu'ils sont confondus et de ce fait qu'ils sont communs aux deux courbes.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $-0{,}5$ (environ) et 1.

1. d. **Méthode** C'est un cas particulier de la méthode décrite dans le cours partie 3, page 86 : on cherche les points de la courbe C_g qui ont pour ordonnée 0, c'est-à-dire les points d'intersection de la courbe C_g avec l'axe des abscisses. On lit leurs abscisses : ce sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont 1 et 2.



Conseil
Bien savoir relier la résolution de l'équation $g(x) = 0$ et la recherche des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
Ce lien sera beaucoup utilisé au chapitre 4.

2. On peut identifier f et g de plusieurs façons.
Voici deux solutions.

• Solution 1
On sait que $f(-1) = -4$ (question 1 a).
Pour $x = -1$, on a
$(x-1)(x+3) = (-1-1)(-1+3) = -2 \times 2 = -4$
et
$(2-x)(x-1) = \big(2-(-1)\big)(-1-1) = 3 \times (-2) = -6$
C'est donc $(x-1)(x+3)$ qui correspond à $f(x)$ et l'autre expression à $g(x)$.

• Solution 2
On sait que les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont 1 et 2 (question 1d).
Résolvons l'équation $(x-1)(x+3) = 0$:

$$(x-1)(x+3) = 0 \iff x-1 = 0 \text{ ou } x+3 = 0$$

Les solutions sont donc 1 et -3.
L'expression $(x-1)(x+3)$ ne peut donc pas correspondre à $g(x)$. C'est donc celle de $f(x)$.
D'où $f(x) = (x-1)(x+3)$
et $g(x) = (2-x)(x-1)$.

Remarque : on peut vérifier que l'équation $(2-x)(x-1) = 0$ a bien pour solutions 1 et 2.

Analyser l'énoncé :
les formes algébriques permettent de calculer des images et de résoudre certaines équations. Ceci permet de penser à confronter les résultats obtenus graphiquement à la question 1. avec ceux obtenus à l'aide des formes algébriques proposées.

Ensuite les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ sont sous forme factorisée ce qui permet de résoudre les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Ceci peut mettre sur la piste de la solution 2.

3. ➘ **Méthode** Cette équation ne se ramène pas à une équation du premier degré donc on rassemble tous les termes dans le premier membre puis on le factorise pour se ramener à un produit qui est égal à 0.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = (2-x)(x-1)$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) - (2-x)(x-1) = 0$

On factorise le premier membre par $(x-1)$ qui est en facteur commun :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)[(x+3)-(2-x)] = 0$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)\,[x+3-2+x] = 0$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x-1=0$ ou $2x+1=0$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x=1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Remarque : on peut contrôler graphiquement ces résultats à l'aide des résultats de la question 1. c.

4. a. Démontrer que $f(x) = x^2 + 2x - 3$ pour tout x réel.

Méthode on applique la méthode de l'exercice résolu 1 page 85 en transformant l'un des membres pour arriver à l'autre.

On sait que $f(x) = (x-1)(x+3)$.
Il s'agit donc de démontrer que pour tout x réel,
$\boldsymbol{(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3.}$
Pour cela développons le premier membre.
$(x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3.$
On a donc pour tout x réel, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Conseil
Pour démontrer une « égalité pour tout réel x », il faut bien observer les expressions données.
Développer est souvent plus facile que factoriser, on a donc choisi ici de partir du membre de gauche (factorisé) pour le développer et arriver au membre de droite (développé).

4. b. Résoudre l'équation $f(x) = -4x - 12$.

Méthode cette équation n'est pas du premier degré donc on rassemble tous les termes dans un membre puis on le factorise pour arriver à un produit qui est nul.

• <u>Solution 1</u> **:** avec la forme développée de $f(x)$

$$f(x) = -4x - 12 \iff x^2 + 2x - 3 = -4x - 12$$
$$\iff x^2 + 6x + 9 = 0$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$f(x) = -4x - 12 \iff (x + 3)^2 = 0$$
$$\iff x = -3$$

Cette équation a une unique solution : -3

• <u>Solution 2</u> **:** avec la forme factorisée de $f(x)$

$$f(x) = -4x - 12 \iff (x - 1)(x + 3) = -4x - 12$$
$$\iff (x - 1)(x + 3) + 4x + 12 = 0$$

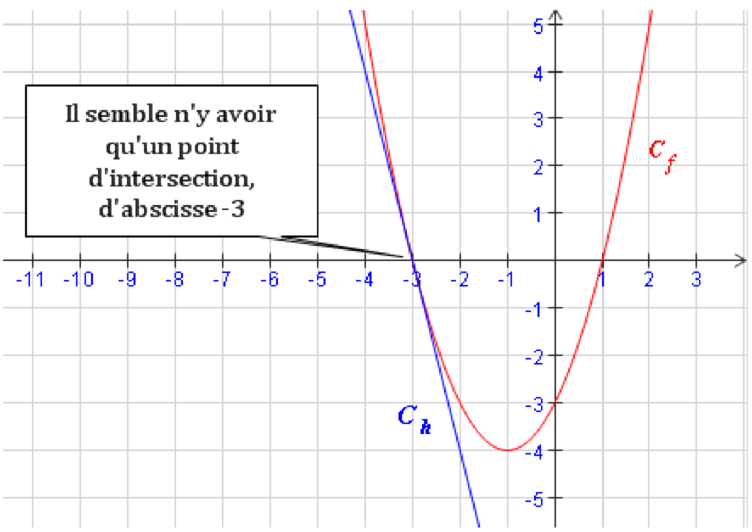
On peut factoriser par étapes :

$$f(x) = -4x - 12 \iff (x - 1)(x + 3) + 4(x + 3) = 0$$
$$\iff (x + 3)\,[(x - 1) + 4]$$
$$\iff (x + 3)\,(x + 3) = 0$$
$$\iff x = -3$$

Cette équation a une unique solution : -3

• <u>Contrôler graphiquement le résultat</u>

Cette équation est de la forme $f(x) = h(x)$ avec $h(x) = -4x - 12$. On peut donc contrôler le résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de h sur le même graphique que celle de f (à la main ou à la calculatrice) et en lisant les abscisses des points d'intersection des courbes représentant f et h.



Conseil

Pour résoudre l'équation
$f(x) = -4x - 12$
il faut choisir la forme de $f(x)$ la mieux adaptée.
Le choix n'est pas toujours immédiat !
Il faut anticiper les calculs pour savoir quelle forme permettra, après avoir rassemblé tous les termes dans le premier membre, de le factoriser (pour arriver à un produit égal à 0).
Ici, la forme développée ou la forme factorisée permettent d'aboutir mais ce n'est pas toujours le cas !