1S3	DEVOIR MAISON N°7	au plus tard vendredi 03 mai 2019

Ce devoir est entièrement facultatif. Il est composé d'exercices pour vous permettre de vous entraîner en vue du devoir commun (vendredi 17 mai de 14h à 17h). Vous pouvez ne traiter qu'un exercice comme tous. Bon travail !

Thème 1 : Fonctions – Second degré

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2-2x+5}$

1°) a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de cette fonction.

b) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-9(x^2-2x-3)}{(x^2-2x+5)^2}$

c) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

2°) On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan d'unités graphiques 1cm en abscisse et 2 cm en ordonnées.

a) Construire la courbe $\mathcal{C}$.

b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1. Tracer cette tangente.

c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{T}$.(Aide : développer $(x-1)^3$)

3°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersections de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

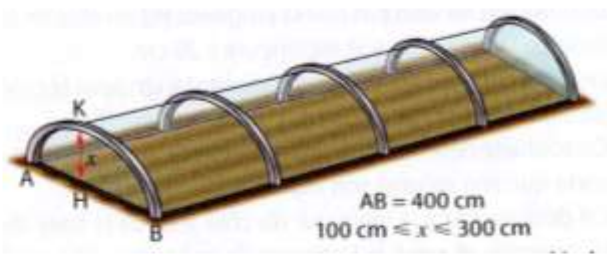
4°) Résoudre algébriquement $f(x) \leq 2$.

Exercice 2 : Tangente parallèle à une droite donnée

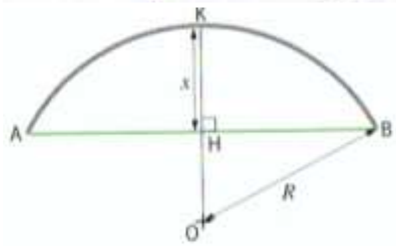
N°91 page 126

Exercice 3 :

Un jeune agriculteur bio veut fabriquer une serre pour protéger ses cultures de tomates dont les dimensions sont indiquées sur le schéma suivant.



La distance $HK = x$ avec H milieu de [AB] est appelée la flèche.
Le rayon de cintrage est noté R.
Ainsi $R = OB = OK = OA$.



On veut déterminer pour quelle valeur de x le rayon R de cintrage est minimal.

1°) a) Exprimer de deux façons différentes R en fonction de x et de OH.

b) En déduire que $OH = \frac{40\,000-x^2}{2x}$

c) Exprimer alors R en fonction de x.

2°) Soit f la fonction définie sur $[100\,;300]$ par $f(x) = \frac{20\,000}{x} + \frac{x}{2}$

a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[100\,;300]$.

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum.

3°) Pour quelle valeur de x le rayon R est-il minimal ? Quelle est alors la particularité de l'arc $\widehat{AB}$?

Thème 2 : les suites

Exercice 4 :

Claude doit choisir entre deux propositions salariales :

Dans l'entreprise A, un salaire d'embauche de 1 600 € qui augmente chaque année de 150 € et dans l'entreprise B, un salaire d'embauche de 2 000 € qui augmente chaque année de 3%.

Il se demande si à un moment, le salaire chez A rattrapera le salaire chez B.

On note a_n le salaire chez A et b_n le salaire chez B l'année n ($n \in \mathbb{N}$), en euros. Ainsi $a_0 = 1\,600$ et $b_0 = 2\,000$.

1°) Calculer les salaires $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

2°) On souhaite entrer une valeur de l'indice n et obtenir les termes a_n et b_n de ces suites.
Voici un algorithme permettant de le faire.
Quels nombres affiche cet algorithme pour $n = 6$?
Que représentent-ils ?

$a \leftarrow 1600$
$b \leftarrow 2000$
Pour $i \leftarrow 1$ à n
$a \leftarrow a + 150$
$b \leftarrow b \times 1{,}03$
Fin Pour
Retourner a et b

3°) a) Quelles sont les natures des suites (a_n) et (b_n) ? Justifier la réponse.

b) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) A l'aide du tableur de votre calculatrice, répondre à la question de Claude en expliquant la démarche.

Dans le cas où le salaire chez A dépassera celui chez B, est-ce définitif ?

4°) Claude se demande maintenant si, vu le retard au départ, le montant total des salaires perçus chez A pourra dépasser une certaine année celui des salaires perçus chez B. Pouvez-vous l'aider ?

Exercice 5 :

On injecte dans le sang d'un malade une dose de médicament. On suppose que ce médicament se répartit instantanément dans le sang et qu'il est ensuite éliminé progressivement, la concentration diminuant de 30 % chaque heure.

On note C_n la concentration en mg/L, n heures après l'injection ($n \in \mathbb{N}$). On donne $C_0 = 4$.

1°) a) Calculer C_1, C_2, C_3

b) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

c) En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

d) Quelle est la concentration 18 heures après l'injection ?

2°) On souhaite maintenir la concentration du médicament au-dessus de 3 mg/L pendant 18 heures, et pour cela on pratique une heure après la première injection, puis toutes les heures, une injection de 1 mg/L du médicament. On note K_n la valeur de la concentration n heures après la première injection.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = 0{,}7K_n + 1$.

b) Soit $d_n = K_n - \frac{10}{3}$. Démontrer que la suite (d_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme d_0.

c) Déterminer d_n en fonction de n et en déduire K_n.

d) Quelle est la concentration du médicament 18 heures après la première injection ?

Exercice 6 :

Dans un récipient vide de contenance un litre, on verse ½ litre d'eau la première minute, ¼ de litre la deuxième minute, 1/8 de litre la minute suivante et ainsi de suite, minute par minute.

1°) Préciser la quantité d'eau v_n versée lors de la $n^{ième}$ minute pour $n \geq 1$.

2°) On veut savoir au bout de combien de temps, il manquera moins de 1 cl pour que le récipient soit plein.
L'algorithme ci-contre doit afficher ce nombre de minutes. On note V_n la quantité d'eau, en cL, contenue dans le récipient au bout de n minutes tant qu'il n'est pas plein.

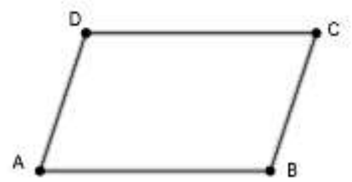
$V \leftarrow 50$
$n \leftarrow 1$
$Tant\ que\ V\ \dots \quad Faire$
$V \leftarrow \cdots$
$n \leftarrow \cdots$
$Fin\ Tant\ que$
$Retourner$

a) Expliquer la valeur 50 affectée à V lors de l'initialisation.
b) Recopier et compléter les parties manquantes de l'algorithme.
3°) Exprimer V_n en fonction de n.
4°) Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre de minutes au bout duquel il manquera moins de 1 cl pour que le récipient soit plein. Expliquer la démarche.

Thème 3 : les vecteurs et droites

Exercice 7 :
Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les points $A(-1\,;3)$, $B(-3\,;\ -2)$ et $C(5\,;\ -1)$.
Les points K, L et R sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].
1°) Calculer les coordonnées des points K, L et R.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BL).
3°) Soit d la droite d'équation $3x + 14y - 1 = 0$
a) Montrer que C et K sont des points de d.
b) Que représente la droite d pour le triangle ABC ?
4°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G des droites (BL) et d.
5°) Vérifier que les points A, G et R sont alignés.

Exercice 8 :
ABCD est un parallélogramme.
E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. I est le milieu de [AB] et J celui de [DC].
On considère le repère (A, B, D).
1°) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.



2°) a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, D et C dans ce repère ?
b) Calculer les coordonnées des points E, I et J.
3°) Démontrer que les points I, E, D sont alignés.
4°) a) Trouver une équation cartésienne de la droite (BJ).
b) Montrer que les droites (BJ) et (ID) sont parallèles.
5°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).
6°) a) Soit F le point d'intersection des droites (BJ) et (AC). Déterminer les coordonnées de F.
b) Prouver que F est le milieu de [EC].

Exercice 9 :
ABCD est un parallélogramme.
a) Faire une figure et placer les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$
b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
c) Démontrer que les droites (BM) et (PN) sont parallèles.

Thème 4 : la trigonométrie

Exercice 10 :

a) Donner la mesure principale des angles de mesure $\frac{27\pi}{4}$; $-\frac{47\pi}{6}$ et $\frac{28\pi}{3}$

b) Donner les cosinus et sinus des réels précédents.

Exercice 11 : Soit a tel que $\sin a = \frac{7}{9}$ et $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$.

1°) Calculer $\cos a$.

2°) En déduire $\cos(-a)$, $\sin(\pi - a)$, $\cos(\pi + a)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de a.

Exercice 12 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin t = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2°) Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$ les équations suivantes :

$\cos(2t) = \cos\frac{3\pi}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Thème 5 : Les probabilités

Exercice 13 : Une urne contient 5 boules rouges et $n - 5$ boules noires où $n \geq 6$.

Partie A Tirage avec remise

Un joueur tire au hasard, successivement et avec remise deux boules.

1°) Illustrer ce tirage par un arbre pondéré.

2°) a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité de l'événement A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

b) Etudier les variations sur $[5\ ;\ +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{10(x-5)}{x^2}$.

En déduire pour quelle valeur de n le joueur a le plus de chances de réaliser l'événement A.

Partie B Tirage sans remise

Un joueur tire au hasard et sans remise deux boules de l'urne. On note encore A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ». Le joueur gagne 2 € s'il réalise A et perd 1 € dans le cas contraire. On note X le gain algébrique du joueur.

1°) On suppose, uniquement dans cette question, que $n = 15$.

a) Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

b) L'organisateur du jeu demande une mise de 1 €. A qui le jeu est-il favorable ?

2°) Dans cette question, n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 5.

a) Illustrer le jeu par un arbre pondéré puis donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance et montrer que $E(X) = \frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$

c) Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

Exercice 14 : Une urne contient une boule rouge et n boules blanches.

On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1°) Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

M : « les deux boules sont de la même couleur » ; N : « les deux boules sont de couleur différente ».

2°) On considère maintenant le jeu suivant : le joueur perd $(n + 1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n + 1)^2$ euros sinon.

On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu est-il favorable au joueur ?

d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?