LES ENSEMBLES DE NOMBRES : EXERCICES, CORRIGÉ.

Rappels :

a , b, c et d sont quatre nombres avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$:

$\rightarrow \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$

$\rightarrow a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$

$\rightarrow \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

$\rightarrow$ On ne change pas le quotient $\frac{a}{b}$ lorsqu'on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre k, différent de 0 :

$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$.

$\rightarrow$ On ne change pas le quotient $\frac{a}{b}$ lorsqu'on divise numérateur et dénominateur par un même nombre k, différent de 0 :

$\frac{a\div k}{b\div k}=\frac{a}{b}$.

$\rightarrow$ L'inverse de b est $\frac{1}{b}$ et l'inverse de $\frac{1}{b}$ est b.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

b, c et d étant non nuls $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Exercice n °1 : calculer (sans crayon), sans calculatrice :

a) $12\times\frac{3}{4}=\frac{12\times3}{4}=\frac{4\times3\times3}{4}=\frac{4\times9}{4\times1}=\frac{9}{1}=9$

b) $6\times\left(1+\frac{5}{3}\right)=6\times\left(\frac{3}{3}+\frac{5}{3}\right)=6\times\frac{8}{3}=\frac{6\times8}{3}=\frac{3\times2\times8}{3\times1}=16$

c) $-3+5\times(-2)=-3+(-10)=-13$

d) $\frac{5}{6}\times\left(\frac{-3}{2}\right)=-\frac{5\times3}{6\times2}=-\frac{5\times3}{3\times2\times2}=-\frac{5}{4}$

e) $11\times32=(10+1)\times32=10\times32+1\times32=320+32=352$

f) $9\times28=(10-1)\times28=10\times28-1\times28=280-28=252$

Exercice n°2 : *(voir thèmes 2 et 5 p 281, 283)*

1°) a) $2-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; b) $\frac{2}{15}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2}{15}-\frac{5}{15}+\frac{9}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

c) $2-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{18}{9}-\frac{4}{9}+\frac{6}{9}=\frac{20}{9}$.

2°) a) $\frac{4}{49}\times\frac{56}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{4\times7\times8\times1}{7\times7\times3\times8}=\frac{4}{21}$; b) $-3\times\frac{-2}{9}=\frac{3\times2}{3\times3}=\frac{2}{3}$;

c) $4\times\frac{15}{8}\times\frac{32}{5}=\frac{4\times5\times3\times8\times4}{8\times5}=48$ d) $\frac{51}{20}\times\frac{-15}{-34}=\frac{51\times15}{20\times34}=\frac{17\times3\times3\times5}{4\times5\times17\times2}=\frac{9}{8}$

3°) a) $\frac{7}{15}-\frac{14}{15}\times\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{15}-\frac{14}{15}\times\left(\frac{15-7}{21}\right)=\frac{7}{15}-\frac{14}{15}\times\frac{8}{21}=\frac{7}{15}-\frac{7\times2\times8}{15\times7\times3}=\frac{7}{15}-\frac{16}{45}=\frac{21}{45}-\frac{16}{45}=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$; c) $-2\left(1-\frac{5}{4}\right)=-2\left(\frac{4}{4}-\frac{5}{4}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{15}{21}-\frac{7}{21}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{6}{4}\right)=\frac{8}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{2\times4\times7}{3\times7\times4}=\frac{2}{3}$

4°) a) $\left(1+\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{5}{5}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{2}-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{5}\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{7}{2}$;

b) $\left(2-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{2}{5}-1\right)=\left(\frac{6}{3}-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{5}\right)=\frac{5}{3}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{3}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{25}{9}$

c) $-6\div\frac{18}{5}=-6\times\frac{5}{18}=-\frac{5}{3}$; d) $\left(3-\frac{2}{3}\right)\times\frac{8-2}{5+2}=\left(\frac{9}{3}-\frac{2}{3}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{7}{3}\times\frac{6}{7}=2$

Exercice n°3 :

$G=3-10\times\frac{2}{4-3^2}=3-10\times\frac{2}{4-9}=3-10\times\frac{2}{-5}=3+\frac{5\times2\times2}{5}=3+4=7$ **;**

$H=-3^2-3\times\frac{\sqrt{25-9}}{(3\times2)^2}=-9-3\times\frac{\sqrt{16}}{6^2}=-9-3\times\frac{4}{36}=-9-\frac{3\times4}{3\times3\times4}=-9-\frac{1}{3}=-\frac{28}{3}$ **;**

$I=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

Exercice n°4 :

1°) a) A= $2^3-5\sqrt{4+5}-3^2+\sqrt{2^2-1}$

A la main A(x) = $8-5\sqrt{9}-9+\sqrt{4-1}$

A $=8-5\times3-9+\sqrt{3}$. A(x) $=8-15-9+\sqrt{3}$. A(x) $=-16+\sqrt{3}$

A≈ -14,27

b) $B=5-3\frac{2-\sqrt{4+1}}{1-2^2}$.

$B=5-3\frac{2-\sqrt{5}}{1-4}=5-3\frac{2-\sqrt{5}}{-3}=5-\frac{3\times\left(2-\sqrt{5}\right)}{-3\times1}=5+\frac{2-\sqrt{5}}{1}=5+2-\sqrt{5}=7-\sqrt{5}\approx4{,}76$

2°) a) $A=-(2\times5)^3+50-\frac{2^4}{\sqrt{10-6}}$

A la main : $A=-(2\times5)^3+50-\frac{2^4}{\sqrt{10-6}}$

$A=-(10)^3+50-\frac{16}{\sqrt{4}}$; $A=-1000+50-\frac{16}{2}$; $A=-1000+50-8$; $\boxed{A=-958}$.

b) $B=10-2\times\frac{17-5}{(3\times2)^2}-\sqrt{25-9}$.

A la main : $B=10-2\times\frac{17-5}{(3\times2)^2}-\sqrt{25-9}$; $B=10-2\times\frac{12}{(6)^2}-\sqrt{16}$; $B=10-2\times\frac{12}{36}-4$; $B=10-2\times\frac{4\times3}{4\times3\times3}-4$

$B=10-2\times\frac{1}{3}-4$; $B=\frac{30}{3}-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}$; $\boxed{B=\frac{16}{3}}$

c) $C=-3^2+\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{-3}{4}+1\right)^2$

A la main $C=-3^2+\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{-3}{4}+1\right)^2$; $C=-9+\left(\frac{2}{4}-\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{-3}{4}+\frac{4}{4}\right)^2$; $C=-9+\left(-\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$C=-9+\left(-\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{1}{16}\right)$; $C=-9+\left(-\frac{1}{4}\right)\times16$; $C=-9-4$; $\boxed{C=-13}$

Exercice n°5 :

1°) Faux : $\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$. A ne pas confondre avec $\sqrt{25}-\sqrt{4}=5-4=1$.

> Attention : Soient a et b deux réels positifs
> en général $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
> Par contre $\sqrt{ab}$ est égal à $\sqrt{a}\sqrt{b}$.

2°) Faux : $2-\frac{3+1}{3}=2-\frac{4}{3}=\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

> Attention : on peut simplifier $2-\frac{3\times1}{3}$ mais pas $2-\frac{3+1}{3}$

3°) Faux : La multiplication est prioritaire sur l'addition et la soustraction $5-2\times\frac{3-7}{4-1}=5-2\times\frac{-4}{3}=5-\frac{-8}{3}=5+\frac{8}{3}=\frac{15}{3}+\frac{8}{3}=\frac{23}{3}$

Attention : $5-2\times\frac{3-7}{4-1}$ n'est pas égal à $(5-2)\times\frac{3-7}{4-1}$

4°) Vrai $\frac{2\sqrt{3}-2^2}{\sqrt{3+1}}=\frac{2\sqrt{3}-4}{\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{3}-4}{2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-2\right)}{2}=\sqrt{3}-2$

Exercice n°6 :

1°) a) Faux : un nombre décimal peut être un entier.
Tous les entiers sont des décimaux.

Exemple : -46 est un décimal car il s'écrit sous la forme $\frac{-46}{10^0}$.

Cas général : pour tout entier a de $\mathbb{Z}$, $a=\frac{a}{10^0}$. On a $\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}$.

b) Vrai : tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels. On a $\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$.

Exemple : -46,52 est un rationnel car il s'écrit sous la forme $\frac{-4652}{10^2}$.

Cas général : pour tout décimal d de $\mathbb{D}$, il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $d=\frac{a}{10^n}$ (10^n est bien un entier naturel non nul).

c) Vrai : tous les nombres décimaux sont des réels. On a $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}$.

d) Faux : par définition, un nombre irrationnel ne peut pas être un entier.

e) Vrai : tous les nombres entiers relatifs sont des décimaux (voir a).

2°) a) Faux : on écrit soit $-3\in\mathbb{Z}$, soit $\{-3\}\subset\mathbb{Z}$

b) Vrai : $\frac{2}{3}\approx 0{,}66666....$ L'écriture décimale est périodique infinie donc $\frac{2}{3}\notin\mathbb{D}$.

c) Faux : on écrit soit $2\pi\in\mathbb{R}$, soit $\{2\pi\}\subset\mathbb{R}$.

d) Faux : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$. $\sqrt{3}$ est un irrationnel.

e) Vrai : voir b) du n°22. $0{,}034=\frac{34}{1000}$ donc $0{,}034\in\mathbb{Q}$.

f) Vrai : $\mathbb{N}\subset\mathbb{D}$.

g) Vrai : $\frac{5}{4}=1{,}25=\frac{125}{10^2}$ donc $\frac{5}{4}\in\mathbb{D}$ h) Vrai : $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$.

3°) a) Faux : la racine carrée d'un entier n'est pas toujours un irrationnel. Exemple : $\sqrt{25}=5$.

b) Faux : $\frac{22}{7}\approx 3{,}142857143$; $3{,}142857143$ est une valeur approchée de $\frac{22}{7}$ à 10^{-9} près.

c) Vrai car l'inverse de $\frac{8}{27}$ est $\frac{27}{8}$ et $\frac{27}{8}=3{,}375$.

d) Faux car l'inverse de $8{,}1$est $\frac{1}{8{,}1}$ et $\frac{1}{8{,}1}\approx 0{,}1234567901$; $0{,}1234567$ est une valeur approchée de $\frac{1}{8{,}1}$ à $10^{-è}$ près

Exercice n°7 *:* (voir thèmes 4 et 6 page 282, 283)

1) $A=2\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}=2\times 6\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12\left(\sqrt{3}\right)^2=12\times 3=36$

$B=\sqrt{45}+2\sqrt{5}-3\sqrt{20}=\sqrt{9\times 5}+2\sqrt{5}-3\sqrt{4\times 5}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-6\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

$C=\frac{2\sqrt{10}}{5}\times\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{10}\times 3\sqrt{2}}{5\times\sqrt{25}}=\frac{6\sqrt{20}}{5\times 5}=\frac{6\sqrt{4\times 5}}{25}=\frac{6\times 2\sqrt{5}}{25}=\frac{12\sqrt{5}}{25}$

2) $D=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=3^2+2\times 3\times 2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2=9+12\sqrt{2}+8=17+12\sqrt{2}$

E = $\left(\sqrt{10}+5\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ = $\sqrt{10}\times\sqrt{2}-\sqrt{10}\times\sqrt{5}+5\sqrt{2}-5\sqrt{5}=\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}+5\sqrt{2}-5\sqrt{5}$ = $2\sqrt{5}-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-5\sqrt{5}$

E= $-3\sqrt{5}$;

F = $\left(4-\sqrt{3}\right)^2$ = $4^2-2\times 4\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$ = $16-8\sqrt{3}+3=19-8\sqrt{3}$;

$$G = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{18}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{2\times 6}{9}-\frac{2\sqrt{12}}{9}$$

$$G = -\frac{3\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{2\times 6}{9}-\frac{2\sqrt{4\times 3}}{9} = -\frac{3\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{2\times 6}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{9}+\frac{4}{3}$$

Exercice n°8 :

Rappel : pour tous nombres a et b $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et	**$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**

1°) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1^2}{\sqrt{2}^2} = 2+2+\frac{1}{2} = 4{,}5$

2°) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{3}^2-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3-\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{1^2}{\sqrt{3}^2} = 3-2+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ est un rationnel.

http://www.mathematiquesfaciles.com/nombres-la-nature-des-nombres_2_78273.htm