CHAPITRE 1 : LES ENSEMBLES DE NOMBRES.

Les nombres sont connus depuis l'Antiquité, mais il a fallu attendre le XIXe siècle avec des mathématiciens comme Cantor pour établir une classification des nombres.

I) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est formé de tous les nombres entiers positifs ou nul.
$\mathbb{N}$ = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …. ; 10 000 ; …}

Les entiers naturels permettent de dénombrer des individus.
$\mathbb{N}$ est un ensemble infini : chaque entier naturel n possède un successeur n+1.

Exercice n°1 : Recopier à la place des pointillés le symbole qui convient ($\in$,$\notin$) :

-7….$\mathbb{N}$; $\frac{10}{2}$ ….$\mathbb{N}$; 0,1 ….$\mathbb{N}$;

Rappel : Le symbole $\in$ se lit « appartient à ».
On utilise ce symbole pour indiquer, qu'un nombre, un élément appartient à un ensemble

II) L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

L'ensemble des entiers relatifs est formé de tous les entiers naturels et de leurs opposés.
$\mathbb{Z}$ = { …. ;-10 001 ; -10 000 ; ….; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ….10 000 ; 10 001 ; ….}

Tout les entiers naturels sont des entiers relatifs.
On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
Le symbole $\subset$ se lit « inclus dans » .

On utilise ce symbole pour indiquer qu'un ensemble est contenu entièrement dans un autre ensemble.
Exemple : {-2 ; 1 ; 6} $\subset \mathbb{Z}$

Exercice n°2 :

a) Vrai ou Faux ? justifier la réponse. $-1 \subset \mathbb{Z}$; $-\frac{9}{3} \notin \mathbb{Z}$; 2,5 $\in$ $\mathbb{Z}$.

b) Recopier à la place des pointillés le symbole qui convient ($\in$,$\notin$,$\subset$, $\not\subset$) :

-2 ….$\mathbb{N}$, {-2} ….$\mathbb{N}$, {-2} ….$\mathbb{Z}$, {-2, -4, 6} ….$\mathbb{Z}$, -7….$\mathbb{Z}$; $\frac{10}{2}$ ….$\mathbb{Z}$; 0,1 ….$\mathbb{Z}$;

III) L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Remarque :

$\mathbb{D}$ contient tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10, c'est à dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec n entier naturel et a un entier relatif.
$\mathbb{D}$ = { $\frac{a}{10^n}$, a $\in$ $\mathbb{Z}$, n$\in$ $\mathbb{N}$}.

Exemple : $3{,}49 = \frac{349}{100} = \frac{349}{10^2}$.

Exercice n°3 :

a) Ecrire les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec n entier naturel et a un entier relatif : 2,34 ; -7,1; 0,0073 ; 12.

b) Compléter les colonnes du tableau par les symboles $\in$ ou $\notin$, (compléter aussi la première ligne pour justifier)

	10^{-2}	$\frac{14}{2}$	$\frac{7}{3}$	-4^2
$\mathbb{N}$				
$\mathbb{Z}$				
$\mathbb{D}$				

Remarque : $\mathbb{D}$ contient tous les nombres entiers ainsi que les nombres ayant une partie décimale finie.
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

IV) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

1°) Définition :

L'ensemble des nombres rationnels contient tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul .

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^* \}$.

Exemples : -7 ; -6,28 ; 0 ; 0,045 ; 182 ; $\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{7}$ sont des nombres rationnels .

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

2°) Savoir préciser la nature d'un rationnel :

Exercice n°4 : Calculatrice interdite. Dans chaque cas, dire si le rationnel est entier, décimal non entier ou rationnel non décimal :

$a = \frac{7}{5}$ $\quad b = -\frac{11}{7}$ $\quad c = -\frac{7 \times 10^3}{10^{-4}}$

Propriété : $\boxed{\text{tout nombre rationnel non décimal se caractérise par une écriture décimale périodique infinie}}$.

V) L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1°) Nombres irrationnels :

On admettra que le nombre $\sqrt{2}$ ainsi que les nombres π et sin(15°) ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction : ce ne sont pas des rationnels.

$\sqrt{2}$, π et sin(15°) sont appelés des **nombres irrationnels** (en règle générale, il n'est pas facile de prouver qu'un nombre donné est irrationnel).

$\sqrt{2}$, π et sin(15°) appartiennent à l'ensemble des nombres réels noté **$\mathbb{R}$.**

π : au XIXe siècle le mathématicien anglais William SHANKS (1812-1882) passa 20 ans à calculer « à la main » les décimales de π. Il en calcula 707. Mais seules les 527 premières étaient exactes. L'erreur ne fut détectée qu'en 1945 et corrigée dans les années 50.

2°) Savoir reconnaître un irrationnel :

Un nombre écrit sous la forme $\sqrt{a}$ (avec a > 0) n'est pas nécessairement un irrationnel. Il faut simplifier son écriture si possible avant de décider.

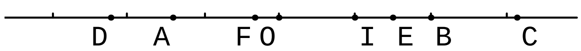
Exercice n°5 : dans chaque cas, dire si le réel est irrationnel ou non. $d = \sqrt{\frac{4}{81}}$, $e = (2\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} + 1)$, $f = \frac{\pi}{2}$, $g = \sqrt{28}$.

3°) Définition : l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels forment l'ensemble des **nombres réels $\mathbb{R}$.**

Soit O et I deux points distincts du plan. Á chaque point M de la droite (OI), on associe son abscisse dans le repère (O , I).
Les nombres réels sont les abscisses de tous les points de la droite.

Exercice n°6 : Á quels points de la droite graduée ci-contre munie du repère (O, I) correspondent les nombres suivants :

2 ; $-\frac{1}{3}$; $-\sqrt{2}$; π ; $\frac{3}{2}$; 1 ; $-\sqrt{5}$



4°) Remarques. Les ensembles de nombres s'emboîtent les uns dans les autres, on peut écrire : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$ (le symbole $\subset$ signifie inclus dans)

L'ensemble des nombres réels positifs est noté $\mathbb{R}^+$;
L'ensemble des nombres réels négatifs est noté $\mathbb{R}^-$.
L'ensemble des nombres réels privé de 0 est noté $\mathbb{R}^*$.

Pour s'entraîner :

http://homeomath.imingo.net/nombres1.htm