

Epreuve de mathématiques. Durée : 3 heures

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices et du formulaire officiel est autorisé.

Le sujet est à rendre avec la copie : **NOM** : **PRENOM** :

Exercice n°1 : 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 centimètres.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $(z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z^2 + 2z\sqrt{3} + 4) = 0$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \left[2 ; \frac{\pi}{4} \right]$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

- Déterminer la forme algébrique de z_A .
 - Déterminer la forme trigonométrique de z_B .
 - Placer les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier votre réponse.
3. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.
- Déterminer OD et DB.
 - Placer le point D sur la figure et déterminer en justifiant la nature du triangle ODB.
 - En déduire l'affixe du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ODB et le rayon r de ce cercle.

Exercice 2 : 4 points

Un jeu en ligne propose aux internautes d'effectuer des missions de difficulté croissante qui, si elles sont réussies, permettent de valider successivement le niveau 1, puis le niveau 2, et enfin le niveau 3.

De plus, les joueurs peuvent bénéficier d'un bonus de rapidité d'un montant de 3 € lorsque le dernier niveau validé l'a été en moins de deux minutes.

Une enquête portant sur 1 200 joueurs a été réalisée.

- 60% de ces joueurs ont validé le niveau 1 uniquement, et parmi eux, 20% ont obtenu le bonus de rapidité.
- 120 joueurs ont validé les trois niveaux, et parmi eux, 6 ont obtenu le bonus de rapidité.
- Au total 186 joueurs ont obtenu le bonus de rapidité.

1. Compléter le tableau.

Joueurs ayant validé :	le niveau 1 uniquement	les niveaux 1 et 2	les trois niveaux	Total
avec bonus				
sans bonus				
Total				1 200

2. On choisit un joueur au hasard dans ce groupe.

- Quelle est la probabilité qu'il ait validé les niveaux 1 et 2 sans bonus ?
- Quelle est la probabilité qu'il ait validé les 3 niveaux avec bonus ?

3. Chaque joueur doit payer une mise de 5 € pour participer au jeu.

Le règlement du jeu est alors défini comme suit :

- sans bonus, la validation du niveau 1 ne rapporte rien,
- sans bonus, la validation des niveaux 1 et 2 rapporte 4 €.
- sans bonus, la validation des trois niveaux rapporte 7 €.

À cela s'ajoute le bonus de rapidité d'un montant de 3 € qui ne peut être attribué qu'une seule fois, dans les conditions précisées en introduction.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros. On rappelle que le gain est la différence entre la somme rapportée et la mise. Il peut être positif ou négatif.

- Donner la liste des valeurs prises par la variable aléatoire X .
- Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

4. Donner une interprétation de $E(X)$.

Problème : (11 points).

Partie A :

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ et C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques 1 cm).

Sur le graphique donné en annexe 1 : on a tracé la partie de courbe C_f qui correspond à x dans l'intervalle $]0, 5]$.
les points $A(1 ; 3)$ et $B(e ; 0)$ appartiennent à C_f ,
la droite T passe par les points $A(1 ; 3)$ et $C(0 ; 7)$.

1) Déterminer $f(1)$ et $f(e)$.

2) Sachant que la droite T est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1, déterminer graphiquement $f'(1)$.

3) Sachant que $f(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$ où a , b , et c sont des réels non nuls, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{2a \ln x + b}{x}$

4) En utilisant les valeurs trouvées aux questions 1) et 2) déterminer a , b et c

Partie B : L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 4 \ln x + 3$

1) a) Montrer que $f(x) = \ln x (\ln x - 4) + 3$ pour tout $x > 0$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $(\ln x - 2)$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln x - 2 \geq 0$.

c) En déduire le tableau de variation de f et préciser les coordonnées exactes du point E où la courbe C_f admet une tangente horizontale D .

3) a) Résoudre l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$

b) En déduire la résolution de l'équation $(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 = 0$

c) Expliquer alors pourquoi la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points : le point B et un point noté F dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

4) Déterminer l'équation de la tangente T' à la courbe C_f au point F .

5) Compléter alors la courbe C_f sur l'annexe 1 en faisant apparaître les points E et F ainsi que les tangentes T' et D .

6) En vous aidant du graphique, justifier alors le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x strictement positif.

Partie C

1) On considère la fonction G définie sur $]0 ; +\infty[$ par $G(x) = x[(\ln x)^2 - 6 \ln x + 9]$. Montrer que G est une primitive de f .

2) Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = e$ et $x = e^3$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.

3) Déterminer l'aire de cette partie du plan dans l'unité d'aire définie par le repère. Puis donner une valeur exacte de cette aire en cm^2 .

