TSTL **Correction de l'évaluation n°6**

Exercice n°1 : 4,5 points. P est la fonction polynôme, définie sur ℝ par P(x) = x^3+4x^2+x-6

1. • P(1) = $1^3+4\times1^2+1-6=1+4+1-6=0$

Théorème : **si un polynôme s'annule pour x = a, alors on peut mettre x – a en facteur dans ce polynôme autrement dit il existe un polynôme Q(x) tel que P(x) = (x – a) Q(x).**

P(1) = 0 donc P(x) est factorisable par x -1 et P(x) = (x -1)$\times$Q(x) où Q(x) est un polynôme à déterminer.

P est de degré 3 donc Q(x) est un polynôme de degré 2 c'est à dire Q(x) = ax^2 + bx + c où a, b, c sont trois réels à déterminer.

Donc P(x) = (x - 1) (ax^2 + bx + c)

Je développe et j'ordonne : P(x) = $ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

Théorème d'identification : **Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux**

Donc en identifiant $ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$ et $x^3 + 4x^2 + x - 6$, on obtient a = 1 ; b - a = 4 ; c - b = 1 et –c = -6
donc a= 1 ; b = 5 et c = 6.

Conclusion : $\boxed{P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6).}$

Vérification : $(x -1)(x^2 + 5x + 6) = x^3 + 5x^2 + 6x - x^2 - 5x - 6 = x^3 + 4x^2 + x - 6 = P(x)$

• P(x) = 0 ⇔ $(x -1)(x^2 + 5x + 6) = 0$ ⇔ $(x -1) = 0$ ou $(x^2 + 5x + 6) = 0$

Soit Δ le discriminant de x^2+5x+6 : $\Delta = 5^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$.

Δ> 0 donc x^2+5x+6 a deux racines $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+1}{2} = -2$.

Conclusion : $\boxed{\text{P(x) = 0 a trois solutions 1, -3 et –2}}$.

2. Résoudre dans ℝ l'équation $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 + (\ln x) - 6 = 0$ (1,5 pt)

D'après le 1°) $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 + (\ln x) - 6 = 0$ ⇔ ln x = 1 ou ln x = -3 ou ln x = -2 ⇔ $x = e$ *ou* $x = e^{-3}$ *ou* $x = e^{-2}$

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation a trois solutions } e, e^{-3} \text{ et } e^{-2}.}$

Problème (19,5 points)

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

1. $g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x)$ donc $g'(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$

2. Pour tout x de]0 ; +∞[, 2x >0 et $\dfrac{2}{x} > 0$.
Donc g'(*x*) > 0 comme somme de deux expressions strictement positives sur]0 ; +∞[.
Conclusion : $\boxed{\text{g est strictement croissante sur]0 ; +}\infty\text{ [.}}$

3. Résolution de l'équation g(*x*) = 0.
a) g(1) = 1 - 4 = - 3 < 0 et g(2) = 2² - 4 + 2ln2 = 2 ln 2 ≈ 1,39 > 0
g est dérivable et strictement croissante sur]0 ; +∞[donc à fortiori sur [1 ; 2].
g(1) et g(2) sont de signes contraires.
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation g}(x)\text{ = 0 possède une solution unique } \alpha \text{ sur l'intervalle [1 ; 2]}}$.

b) d'après le a) 1 < α< 2.
g(1,7) ≈ -0,05< 0 et g(1,8) ≈ 0,42 > 0 donc 1,7 < α< 1,8.

g(1,71) ≈ -0,003< 0 et g(1,72) ≈ 0,043 > 0 donc $\boxed{1{,}71 < \alpha < 1{,}72}$

4) g est strictement croissante sur]0 ; +∞ [et g(α) = 0, on en déduit que $\boxed{g(x) < 0 \text{ sur }]0 ; \alpha [\text{ et } g(x) > 0 \text{ sur }]\alpha ; +\infty [.}$

II) Etude de la fonction *f* : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln(x)}{x}$ sur]0 ; +∞ [.

1) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1) = -1$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)+\dfrac{2}{x} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(-2\ln x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\}$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2\ln x}{x}=+\infty$. Conclusion $\boxed{\text{par somme } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C

2) Etude en $+\infty$.

a) limite de *f* en $+\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x}=0 \text{ (cf formulaire)}\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x}=0 \text{ (cf formulaire)}\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - 1 \text{ est asymptote oblique à la courbe C}}$.

c) Pour tout réel x de]0 ; $+\infty$[, $f(x)=(x-1) \Leftrightarrow \frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 2(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$

Conclusion : l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est e - 1 (en remplaçant x = e dans l'équation de D , on trouve y = e - 1). Donc le point A d'intersection de C et D a pour coordonnées (e ; e -1).

d) $f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$

Sur]0 ; $+\infty$ [x >0, de plus 2 est strictement positif donc f(x) - (x - 1) est du signe de 1 - ln x .
1 - ln x > 0 si et seulement si ln x < 1 c'est à dire si et seulement si lnx < lne .
Or la fonction ln est strictement croissante sur]0 ; $+\infty$ [donc 1 - ln x > 0 si et seulement si x < e

Conclusion : - sur l'intervalle]0 ; *e*[, la courbe C est au dessus de la droite D
- sur l'intervalle]*e* ; $+\infty$ [,la courbe C est en dessous de la droite D

x	0	e	$+\infty$
1 - lnx	+	0	-
2	+		+
x	+		+
Signe de f(x) – (x –1)	+		-
Positions relatives de C et D	C est au dessus de D		C est en dessous de D

3) Etude des variations de *f*.

a) $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}-\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-4+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

Conclusion : $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}}$

b) Sur]0 ; $+\infty$[, x² > 0, f '(x) est donc du signe de g(x).
D'après la partie I) g(*x*) < 0 sur]0 ; α [et g(*x*) > 0 sur] α; $+\infty$ [où 1,71 < α< 1,72.
On en déduit les variations de f :

x	0	α	$+\infty$
Signe de f'(x)	‖ -	0	+
Variations de f	‖ $+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

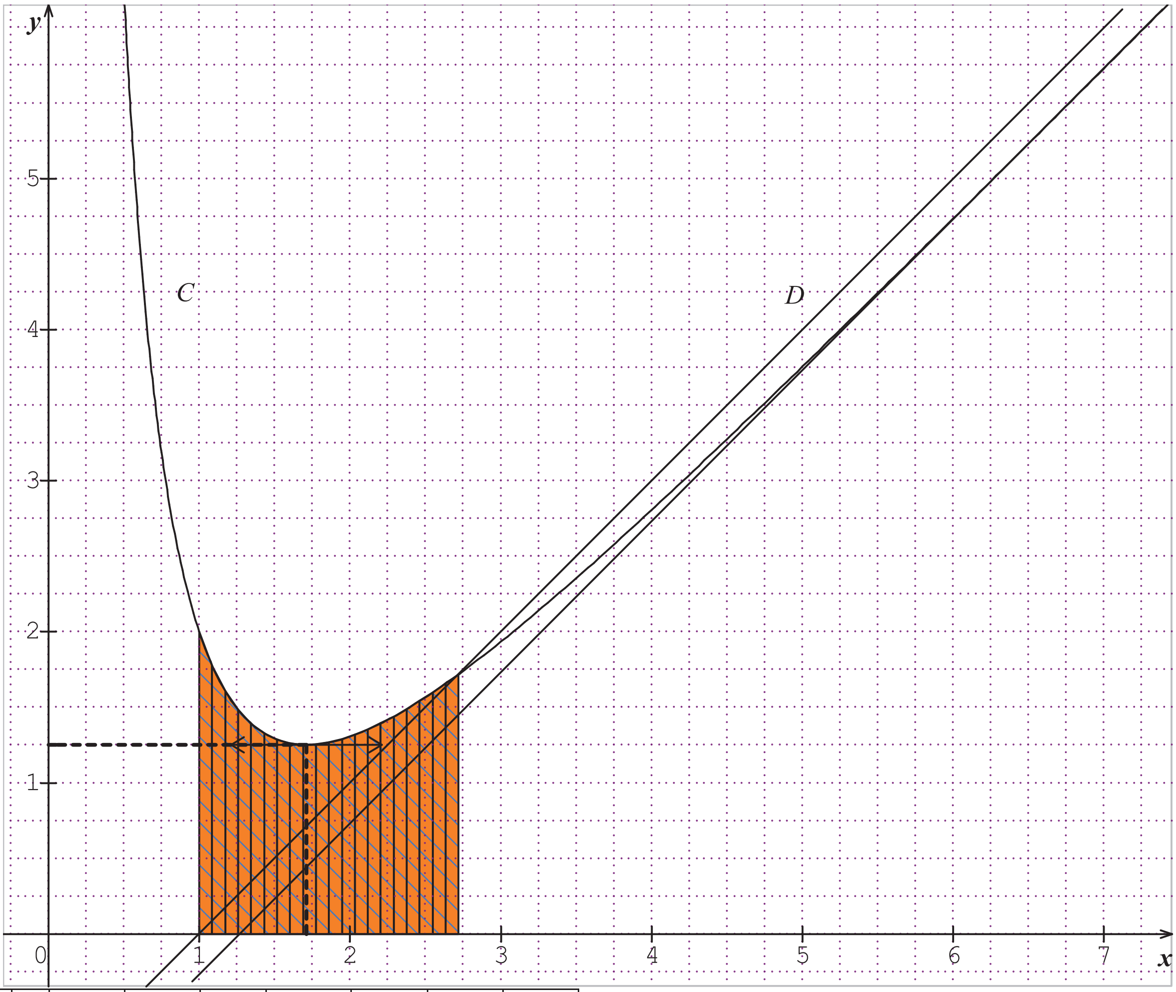
$f(\alpha)\approx 1{,}25$

4) Le coefficient directeur de T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e² est $f'(e^2)$.

$f'(e^2) = \dfrac{(e^2)^2 - 4 + 2\ln e^2}{(e^2)^2} = \dfrac{e^4 - 4 + 2\times 2}{e^4} = \dfrac{e^4}{e^4} = 1$. Par ailleurs le coefficient directeur de la droite D est 1.

On en déduit que T et D ont le **même coefficient directeur**, donc les droites T et D sont **parallèles**.

5) Voir figure



x	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	6,27	3,18	2	1,31	1,93	2,81	3,76	4,74	5,73	6,73

III) Calcul d'une aire

1) $H(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$.

On sait que $(u^2)' = 2u'u$, on en déduit que $H'(x) = \dfrac{2x}{2} - 1 + 2\times\dfrac{1}{x} - 2(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$. Soit $H'(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}$

On constate que H' = f donc H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) a) voir figure

b) S = H(e) – H(1)

$H(e) = \dfrac{e^2}{2} - e + 2\ln e - (\ln e)^2 = \dfrac{e^2}{2} - e + 2 - 1 = \dfrac{e^2}{2} - e + 1$

$H(1) = \dfrac{1^2}{2} - 1 + 2\ln 1 - (\ln 1)^2 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

Donc S = $\left(\dfrac{e^2}{2} - e + 1\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{3}{2}$ u.a. où u.a est l'unité d'aire associée au repère.

Conclusion : $\boxed{S = \dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{3}{2}\ \text{u.a}}$.

c) L'unité de longueur sur chaque axe est de 2 cm donc l'unité d'aire est 4 cm².

Donc $S = 4\times\left(\dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{3}{2}\right) = 2e^2 - 4e + 6$ cm² $\approx$ 9,90 cm².

La valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 est 990 mm².