TSTL **Vendredi 10 février 2012** **Evaluation n°6 :**

Exercice n°1 : Soit P la fonction polynôme, définie sur ℝ par P(x) = $x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. Calculer P(1) ; en déduire une factorisation de P(x).
Résoudre dans ℝ, l'équation $(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$
2. Résoudre dans ℝ l'équation $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 + (\ln x) - 6 = 0$

Problème :
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est 2 cm).

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$, puis de calculer une aire.

I. Etude d'une fonction auxiliaire g.
On note g la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x)$.
1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en +∞.)
3. Résolution de l'équation g(x)= 0.
a) Démonter que sur l'intervalle [1 ; 2] l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de g(x) suivant les valeurs de x, dans l'intervalle] 0 ; +∞ [.

II. Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
2. Etude en +∞.
a) Déterminer la limite de f en +∞.
b) Démontrer que la droite D d'équation y = x – 1 est asymptote à la courbe C.
c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C et à la droite D.
d) Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. Etude des variations de f.
a) Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f.
Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞ [: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ où g est la fonction étudiée dans la partie **I**.
b) En utilisant les résultats de la partie **I**, dresser le tableau des variations de la fonction f.

4. On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2 . Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.
5. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal d'unité graphique 2 cm, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,25$).

III. Calcul d'une aire
On définit sur l'intervalle] 0 ; + ∞[la fonction H par : $H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$.
1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.
2. Soit A la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x =1 et x=e.
a) Hachurer la région A sur votre figure.
b) On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région A.
On admet que S = H(e) –H(1).
Déterminer la valeur exacte de S.
c) Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm².