

Exercice n°1 : (13,5 points) ; f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{1 - x}$

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x + 10) = -\infty$ donc on ne peut pas conclure directement pour la somme des limites.

Pour "lever l'indétermination", on va mettre en facteur le monôme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis

$$\text{simplifier : } f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{1 - x} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \frac{x \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1 \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = -1.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 7x + 10) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0^-$ car

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1-x	+	0	-

Donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

$$2) ax + b + \frac{c}{1-x} = \frac{(ax+b)(1-x)}{1-x} + \frac{c}{1-x} = \frac{ax - ax^2 + b - bx}{1-x} + \frac{c}{1-x} = \frac{-ax^2 + (a-b)x + b+c}{1-x}.$$

Par identification avec $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{1-x}$, on obtient $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -7 \\ b + c = 10 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$.

Conclusion : pour tout réel x de $]1, +\infty[$, $f(x) = -x + 6 + \frac{4}{1-x}$.

$$3) a) f(x) - (6 - x) = \frac{4}{1-x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (6 - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1-x} = 0^-.$$

Conclusion : la droite d'équation $y = 6 - x$ est asymptote oblique à la courbe.

$$b) f(x) - (6 - x) = \frac{4}{1-x}.$$

sur $]1, +\infty[$, $1 - x < 0$ et donc $f(x) - (6 - x) < 0$. D'où sur $]1, +\infty[$, la courbe est située en dessous de l'asymptote.

4) a) f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(2x - 7)(1-x) - (x^2 - 7x + 10)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 7 - 2x^2 + 7x + x^2 - 7x + 10}{(1-x)^2}$$

$$\text{On a bien } f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}.$$

b) Etude du signe de la dérivée.

Un carré est toujours positif donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur c'est à dire du signe de $-x^2 + 2x + 3$

Soit Δ le discriminant de $-x^2 + 2x + 3$: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16$

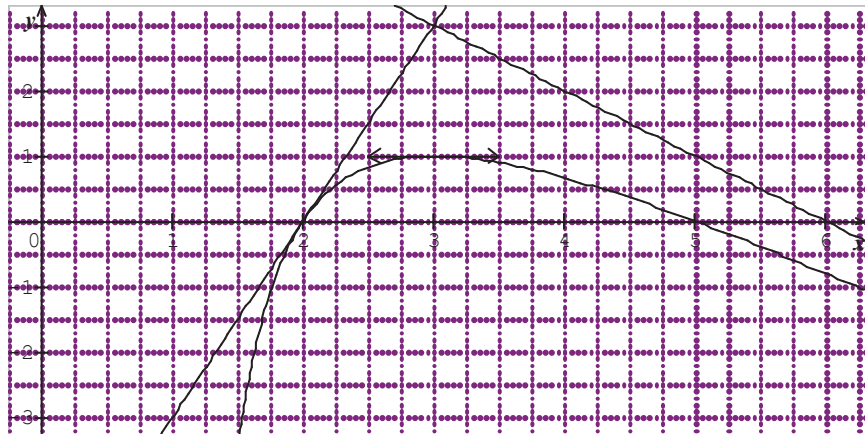
$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 2x + 3$ a deux racines : $\frac{-2-4}{-2} = 3$ et $\frac{-2+4}{-2} = -1$. Comme $-1 \notin]1, +\infty[$ donc sur $]1, +\infty[$, $f'(x) = 0$ a une solution 3 et

la courbe représentative de f a une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 3.

On sait que $-x^2 + 2x + 3$ est du signe de a c'est à dire strictement positif à l'extérieur des racines et du signe de $-a$, c'est à dire négatif à l'intérieur.

Tableau de variation de f sur $]1, +\infty[$.

$$f(3) = \frac{3^2 - 21 + 10}{1-3} = \frac{-2}{-2} = 1$$



x	1	3	$+\infty$
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	+	0	-
Signe de $(1-x)^2$	+	+	+
Signe de $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}$	+	0	-
Variations de f			

5°) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$f'(2) = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } f(2) = \frac{0}{-1} = 0. \text{ Conclusion : l'équation de T est : } y = 3x - 6$$

6°) Construction de (C) :

a) Visualiser un tableau de valeurs avec la calculatrice et le recopier :

Tableau de valeurs

x	1,25	1,5	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-11,25	-3,5	0	1	0,67	0	-0,8	-1,67	-2,6

b) Tracer le repère : unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnée.

c) Placer le point (3, 1) et tracer la tangente horizontale passant par ce point.

d) Tracer l'asymptote oblique d'équation $y = 6 - x$ passant par les points (0, 6) et (6, 6).

Tracer l'asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Tracer la tangente T passant par les points (0 ; -6), (1 ; -3) et (2 ; 0).

Placer les points donnés par le tableau de valeurs ci dessus et tracer la courbe C.

Exercice n°2 (2,5 points): $f(x) = 3 \cos(x) + 9x^2 - 2x$.

1°) f est **dérivable** sur $]-\infty, +\infty[$ donc f admet des primitives sur cet intervalle.

$$2^\circ) F(x) = 3 \sin(x) + 9 \frac{x^3}{3} - x^2 + C = 3 \sin(x) + 3x^3 - x^2 + C \text{ où } C \text{ est une constante réelle à déterminer.}$$

$$F(0) = 3 \sin(0) + 9 \times \frac{0^3}{3} - 0^2 + C = C$$

$$F(0) = 2 \text{ donc } C = 2 = 0.$$

$$\text{Conclusion : la primitive cherchée est : } F(x) = 3 \sin(x) + 3x^3 - x^2 + 2$$

Exercice n°3 (2,5 points) : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x^2 - 4)(x^3 - 2x - 2)^2$.

$$1^\circ) \text{ On pose } u(x) = x^3 - 2x - 2 \text{ donc } u'(x) = 3x^2 - 2. f(x) \text{ s'écrit sous la forme : } f(x) = 2 \times u'(x) \times [u(x)]^2 \text{ on a } k = 2$$

2°) Théorème :

$$\text{Soit } n \text{ un nombre entier positif ; soit } u \text{ une fonction dérivable sur } I ; \text{ une primitive de } u'u^n \text{ est } \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

$$\text{On en déduit qu'une primitive de } u'u^2 \text{ est } \frac{u^3}{3}. \text{ Donc } f \text{ a pour primitive } F(x) = 2 \times \frac{[u(x)]^3}{3} + C.$$

$$\text{C'est à dire } F(x) = \frac{2}{3} \times (x^3 - 2x - 2)^3 + C.$$

$$F(1) = \frac{2}{3} \times (1^3 - 2 - 2)^3 + C = \frac{2}{3} \times (-3)^3 + C = -18 + C. \text{ Or } F(1) = 0 \text{ donc } C = 18.$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{2}{3} \times (x^3 - 2x - 2)^3 + 18$$

Exercice n°4 (1,5 point) : f est la fonction définie sur $I =]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 3x - 12 + \frac{12}{(x+1)^2}$

$$\text{On pose } u(x) = x + 1 \text{ donc } u'(x) = 1 \text{ et donc } \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

$$\text{Théorème : soit } u \text{ une fonction dérivable et non nulle sur } I ; \text{ une primitive de } \frac{u'}{u^2} \text{ est } -\frac{1}{u}.$$

$$\text{On en déduit qu'une primitive de } \frac{1}{(x+1)^2} \text{ est } -\frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Or } f(x) = 3x - 12 + 12 \times \frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{donc les primitives de } f \text{ sont de la forme } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 12 \times \left(-\frac{1}{x+1}\right) + C \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$