Exercice n°1 **:** $P(z)=z^3+\left(1-2\sqrt{3}\right)z^2+2\left(2-\sqrt{3}\right)z+4$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. **a**) $P(-1)==-1+\left(1-2\sqrt{3}\right)-2\left(2-\sqrt{3}\right)+4=-1+1-2\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}+4=0$.

b) P(z) est factorisable par z+1.

C'est à dire P(z) peut s'écrire sous la forme P(*z*) = (z+ 1)(az^2+bz+c) où *a, b* et *c* sont trois réels à déterminer.

On développe et on ordonne $(z+1)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+bz^2+cz+az^2+bz+c=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$

En procédant par identification avec $P(z)=z^3+\left(1-2\sqrt{3}\right)z^2+2\left(2-\sqrt{3}\right)z+4$,

on obtient : a= 1 ; b + a =1- $2\sqrt{3}$; c + b = $4-2\sqrt{3}$ et c = 4

Donc a = 1 ; b = $-2\sqrt{3}$; c = 4.

Conclusion : $\boxed{P(z)=(z+1)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)}$

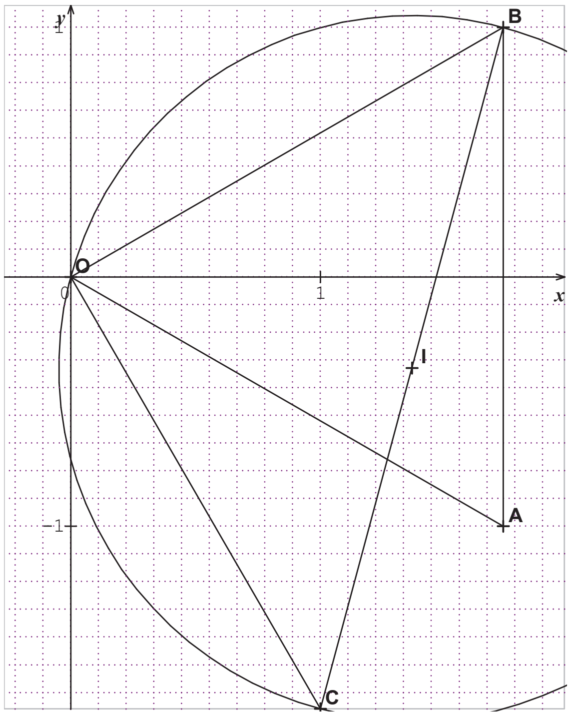
c) Soit Δ le discriminant de l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$:

$\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times4=12-16=-4=(2i)^2$

$\Delta<0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\sqrt{3}+i\,.$$

d) d'après b) et c) $P(z)=0$ a trois solutions $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}+i$ et –1.



2°) $A(\sqrt{3},-1)$ $B(\sqrt{3},1)$

$AB=|z_2-z_1|=\left|\sqrt{3}+i-\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=|2i|=2$.

$OA=|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Deux nombres complexes conjugués ont même module donc

$OB=|z_2|=2$

Donc $OA=OB=AB$.

Donc le triangle OAB est équilatéral.

3°) C est le point d'affixe $z_3=1-\sqrt{3}i$

a) Réciproque du théorème de Pythagore : Si $OB^2+OC^2=BC^2$ alors le triangle OBC est rectangle en O.

Nous avons donc besoin de calculer OB, OC et BC.

OC = $|z_C|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$

BC = $|z_C-z_B|$. Or $z_C-z_B=1-i\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+i\right)=1-\sqrt{3}+i\left(-\sqrt{3}-1\right)$

donc

$$|z_C-z_B|=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{8}\,.$$

Conclusion : $\boxed{BC=2\sqrt{2}\,.}$

$OB^2+OC^2=4+4=8$ et $BC^2=8$ donc $OB^2+OC^2=BC^2$

Conclusion : d'après la réciproque du théorème de pythagore, $\boxed{\text{le triangle OBC est rectangle en O}}$

b) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, d'où :

$$z_\Omega=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{\sqrt{3}+i+1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Le rayon r est $\frac{BC}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Exercice n°2 (bac GM a 2006) : on considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 - 2i$. On pose $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1°) $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2-2i} = \dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2+2i)}{2^2+(-2)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+2i\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{8} = \dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+i(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}{8}$.

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2(\sqrt{2}-\sqrt{6})+2i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\times 4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$.

D'où $\boxed{z_3 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}}$

La partie réelle de z_3 est $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

La partie imaginaire de z_3 est $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2°) a) $|z_1| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = \sqrt{2\times 4} = 2\sqrt{2}$. Soit $\boxed{|z_1| = 2\sqrt{2}}$

Soit θ_1 un argument de z_1 : $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\boxed{\arg z_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4}\times\sqrt{2}$. Soit $\boxed{|z_2| = 2\sqrt{2}}$.

Soit θ_2 un argument de z_2 : $\cos\theta_2 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2 = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\boxed{\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$;

b) $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ donc on en déduit que $|z_3| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$. C'est à dire $|z_3| = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ Soit $\boxed{|z_3| = 1}$.

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ donc on en déduit que $\arg(z_3) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$. C'est à dire $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$.

Soit $\boxed{\arg(z_3) = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi}$.

c) Conclusion : $\boxed{z_3 = \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}}$

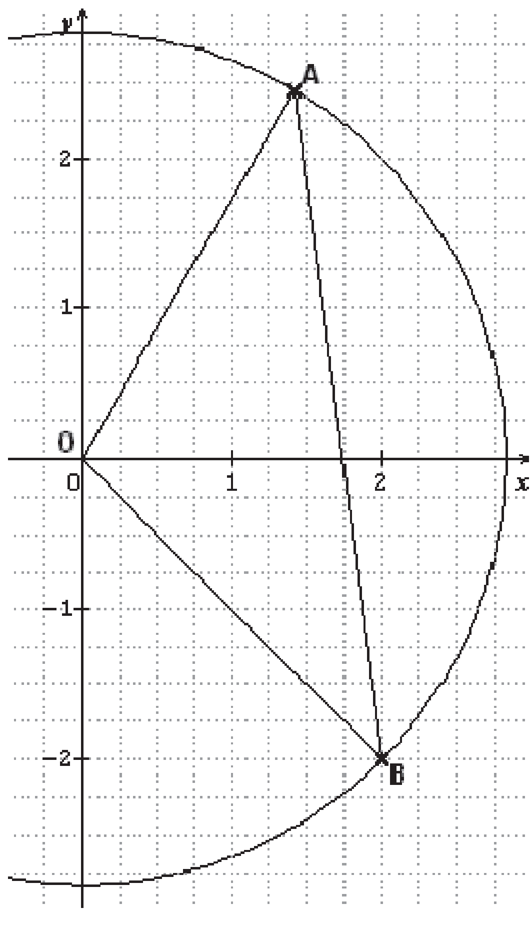
3°) D'après le 1°) et 2°)b) on a $z_3 = \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$.

Ce sont deux écritures du même nombre, donc

les parties réelles sont égales : $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

et les parties imaginaires sont égales : $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Conclusion : $\boxed{\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.



b) Nature du triangle OAB :

d'après le 2°) a) $OA = |z_1| = 2\sqrt{2}$

et $OB = |z_2| = 2\sqrt{2}$

Donc <u>le triangle OAB est isocèle en O</u>**.**

$AB = |z_2 - z_1| = |2 - 2i - \sqrt{2} - i\sqrt{6}| = |2 - \sqrt{2} - i(2+\sqrt{6})|$

$AB = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 + \left[-(2+\sqrt{6})^2\right]} = \sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 4\sqrt{6} + 6}$

$AB = \sqrt{16 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}} \neq 2\sqrt{2}$ donc ABO n'est pas équilatéral

OA² + OB² = 8 + 8 = 16 $\neq$ *AB²* donc ABO n'est pas rectangle en O