

Exercice n°1 : le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées)

1°) a) $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$

b) pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc l'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

c) On cherche les abscisses des points de la parabole situés au dessus de la droite d'équation $y = 4$:

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

d) $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

2°) a) $0 \leq x \leq \sqrt{3}$.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle est forcément strictement croissante sur $[0, \sqrt{3}]$.

On en déduit que $0^2 \leq x^2 \leq \sqrt{3}^2$.

Conclusion : $0 \leq x^2 \leq 3$

b) $-2 \leq x \leq -1$.

La fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ donc elle est forcément strictement décroissante sur $[-2, -1]$. On en déduit que $(-2)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2$.

Conclusion : $1 \leq x^2 \leq 4$

c) $-1 \leq x \leq 2$.

1^{er} cas : $x \in [-1 ; 0]$

La fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ donc elle est forcément strictement décroissante sur $[-1 ; 0]$

On en déduit que $0 \leq x^2 \leq (-1)^2$, soit $0 \leq x^2 \leq 1$.

2^{ème} cas : $x \in [0 ; 2]$

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle est forcément strictement croissante sur $[0, 2]$.

On en déduit que $0^2 \leq x^2 \leq 2^2$. Conclusion : $0 \leq x^2 \leq 4$

Au final : $0 \leq x^2 \leq 4$

Exercice n°2 :

1°) a) $\frac{1}{x} = 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

c) On cherche les abscisses des points de l'hyperbole situés au dessus de la droite d'équation $y = 4$:

$$\frac{1}{x} > 4 \Leftrightarrow x \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$$

d) On cherche les abscisses des points de l'hyperbole situés au dessous de la droite d'équation $y = 5$:

$$\frac{1}{x} \leq 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{5}, +\infty \right[$$

2°) a) $1 \leq x \leq 3$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Donc on inverse l'ordre : on en déduit que $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$.

b) $-2 \leq x \leq -1$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

Donc on inverse l'ordre : on en déduit que $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq -1$.

Exercice n°3 :

1°) $-(x+3)^2 + 4 = -(x^2 + 6x + 9) + 4 = -x^2 - 6x - 9 + 4 = -x^2 - 6x - 5 = f(x)$.

2°) f est une fonction polynôme du second degré donc C_f est une parabole tournée vers le bas car le coefficient de x^2 , de sommet S(-3 ; 6), d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -3$

3°)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f		4	

4°) Représentation graphique f :

x	-6	-5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0
f(x)	-5	0	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0	-5

On complète à droite de la droite d'équation $x = -3$ par symétrie

5°) $(5+x)(-1-x) = -5 - 5x - x - x^2 = -x^2 - 6x - 5 = f(x)$.

6°) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (5+x)(-1-x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -1$

b) $f(x) = 4 \Leftrightarrow -(x+3)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow -(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

c) $f(x) = -5 \Leftrightarrow -x^2 - 6x - 5 = -5 \Leftrightarrow -x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(-x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -6$

7°) On étudie le signe de f(x) à l'aide d'un tableau de signe :

Valeurs de x	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$
Signe de -1-x		+	0	-
Signe de -5+x	-	0	+	+
Signe du produit	-	0	+	-

$S =]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$

Partie B. $f(x) = -(x+3)^2 + 4$.

1°) Enchaînement : prendre x , ajouter 3, élever au carré, multiplier par -1, ajouter 4.

2°) Etude du sens de variation de f sur $]-\infty; -3]$

Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq -3$.

En ajoutant 3 à chaque membre, on obtient : $a+3 < b+3 \leq 0$;

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et les réels $a+3$ et $b+3$ sont négatifs, donc leurs carrés sont rangés dans un ordre contraire. Ainsi : $(a+3)^2 > (b+3)^2$

En multipliant chaque membre par -1 qui est négatif (on change le sens des inégalités) , on obtient :

$-(a+3)^2 < -(b+3)^2$

Enfin en ajoutant 4 à chaque membre, on obtient : $-(a+3)^2 + 4 < -(b+3)^2 + 4$. C'est à dire $f(a) < f(b)$.

Finalement : les réels a et b de $]-\infty; -3]$ sont rangés dans le même ordre que f(a) et f(b).

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; -3]$.

Exercice n°4:

S(1 ; -2) est le sommet de la parabole donc la parabole a pour équation $y = a(x-1)^2 - 2$ où a est à trouver.

A(2 ; 0) est sur la parabole donc $0 = a(2-1)^2 - 2$ d'où $a-2 = 0$ soit $a = 2$.

Conclusion : la parabole a pour équation $y = 2(x-1)^2 - 2$

Exercice n°5

a) A et B ont la même ordonnée donc $x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$.

L'abscisse de S est 3 et donc $f(x) = a(x - 3)^3 + \beta$ où a et β sont à trouver.

b) A (2 ; 0) est sur la parabole donc $f(2) = 0$. Or $f(2) = a(2 - 3)^3 + \beta = a + \beta$ d'où $a + \beta = 0$

C (1 ; -3) est sur la parabole donc $f(1) = -3$. Or $f(1) = a(1 - 3)^3 + \beta = 4a + \beta$ d'où $4a + \beta = -3$

$$\begin{cases} a + \beta = 0 \\ 4a + \beta = -3 \end{cases} \text{ donc } 4a + \beta - (a + \beta) = -3 - 0 \text{ c'est-à-dire } 3a = -3 \text{ soit } a = -1.$$

On remplace dans $a + \beta = 0$ d'où $\beta = 1$.

Finalement $f(x) = -(x - 3)^3 + 1$

c) L'ordonnée du sommet S est 1.

Exercice n°6 :

a) $0 \leq \text{Ran\#} < 1$ donc $0,6 \leq \text{Ran\#} + 0,6 < 1,6$

b) L'instruction $\text{Int}(\text{Ran\#} + 0,6)$ renvoie les nombres 0 et 1.

c) La fréquence de 0 si l'on tape cette instruction un très grand nombre de fois sera 0,4

La fréquence de 1 si l'on tape cette instruction un très grand nombre de fois sera 0,6

En effet sur un grand nombre d'activation, les fréquences de 0 et 1 sont proportionnelles aux amplitudes de $[0,6 ; 1[$ et $[1 ; 1,6[$ et sont donc respectivement 40% et 60% environ.