Seconde	Contrôle Commun (corrigé)

Exercice 1

Affirmation 1 : fausse, en effet $(-6)^2 = 36 > 25$ mais $-6 < 5$!

Affirmation 2 : fausse, par exemple, la fonction "carré", elle n'est pas croissante sur $[-2\,;2]$ mais elle n'est pas pour autant décroissante sur $[-2\,;2]$.

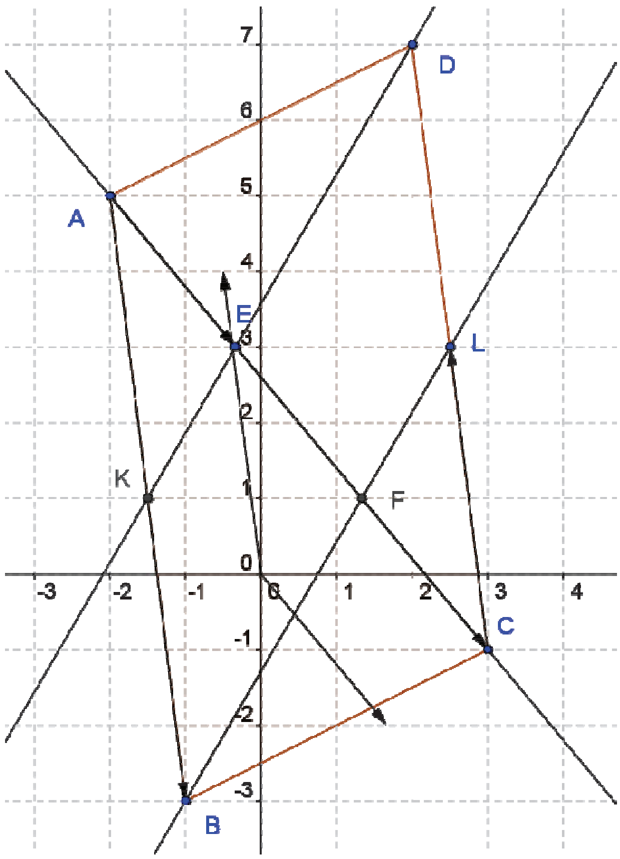
Affirmation 3 : fausse, $P(A) = \dfrac{16\times15}{32\times31} = \dfrac{15}{62} \neq \dfrac{1}{3}$.

Affirmation 4 : vraie, en effet $\dfrac{286\times100}{32{,}5} = 880$.

Affirmation 5 : fausse, en effet $100-(26{,}25+32{,}5+30) = 11{,}25$ puis $\dfrac{11{,}25}{26{,}25} = \dfrac{3}{7} \neq \dfrac{1}{2}$.

Affirmation 6 : vraie, en effet :
Les segments [AB] et [CD] sont deux diamètres d'un cercle alors ces deux segments ont la même longueur et le même milieu. Ainsi, les diagonales [AB] et [CD] du quadrilatère ACBD ont la même longueur et le même milieu, on peut en déduire que le quadrilatère ACBD est un rectangle.

Exercice 2



1. Voir figure.

2. $\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

4.a) Soit E $(x\,;y)$. $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc

$$\begin{cases} x-(-2) = \frac{1}{3}(3-(-2)) \\ y-5 = \frac{1}{3}(-1-5) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 = \frac{5}{3} \\ y-5 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases}$$

d'où $E\left(-\dfrac{1}{3}\,;3\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{-2+(-1)}{2} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-3+5}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{donc } K\left(-\frac{3}{2}\,;1\right).$$

4.b) $\overrightarrow{EK} : \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ -2 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{ED} : \begin{pmatrix} 2-\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ED} = -2\overrightarrow{EK}$

donc les points E, K et D sont alignés.

5. a) $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ puisque ABCD est un parallélogramme donc L est bien le milieu de [DC].

5. b) K est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{KB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (vu au-dessus) donc $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{DL}$ donc le quadrilatère KDLB est un parallélogramme donc les droites (KD) et (BL) sont parallèles.

6. a) $x_A \neq x_C$ $(-2 \neq 3)$ donc (AC) a une équation de la forme : $y = ax + b$.

$a = \dfrac{-1-5}{3-(-2)} = -\dfrac{6}{5}$ donc (AC) : $y = -\dfrac{6}{5}x + b$. Or $A \in (AC)$ donc $5 = -\dfrac{6}{5}\times(-2) + b$ puis $b = 5 - \dfrac{12}{5} = \dfrac{13}{5}$

Ainsi, (AC) : $y = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5}$.

6. b) Les droites (AC) et (BL) n'ont pas le même coefficient directeur $\left(-\frac{6}{5} \neq \frac{12}{7}\right)$ donc elles se coupent.

6. b) L'abscisse du point F d'intersection des droites (AC) et (BL) est solution de $-\frac{6}{5}x + \frac{13}{5} = \frac{12}{7}x - \frac{9}{7}$

Ainsi, $-\frac{6}{5}x - \frac{12}{7}x = -\frac{9}{7} - \frac{13}{5} \Leftrightarrow \left(-\frac{42}{35} - \frac{60}{35}\right)x = -\frac{45}{35} - \frac{91}{35} \Leftrightarrow -\frac{102}{35}x = -\frac{136}{35} \Leftrightarrow x = \frac{136}{35} \times \frac{35}{102} = \frac{4}{3}$

Son ordonnée est donc $-\frac{6}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{13}{5} = -\frac{8}{5} + \frac{13}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

Ainsi, F a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;1\right)$.

Exercice 3

1. a) $f(x) = \frac{(3x-21)(x+2)}{5(x+2)} + \frac{54}{5(x+2)} = \frac{3x^2+6x-21x-42+54}{5x+10} = \frac{3x^2-15x+12}{5x+10}$

donc, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2\,;6]$, $f(x) = \frac{3x^2-15x+12}{5x+10}$.

1. b) $3(x-4)(x-1) = 3(x^2-x-4x+4) = 3x^2-15x+12$

donc, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2\,;6]$, $f(x) = \frac{3(x-4)(x-1)}{5x+10}$.

1. c)

x	-2		1		4		6
$x-4$		−		−	0	+	
$x-1$		−	0	+		+	
$5x+10$	0	+		+		+	
$f(x)$	‖	+	0	−	0	+	

2. a)

$$g(x) = 2$$
$$x^2-3x+2 = 2$$
$$x^2-3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

donc les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée 2 sont 0 et 3.

2. b)

x	-2		1		2		6
$g(x)$		+	0	-	0	+	

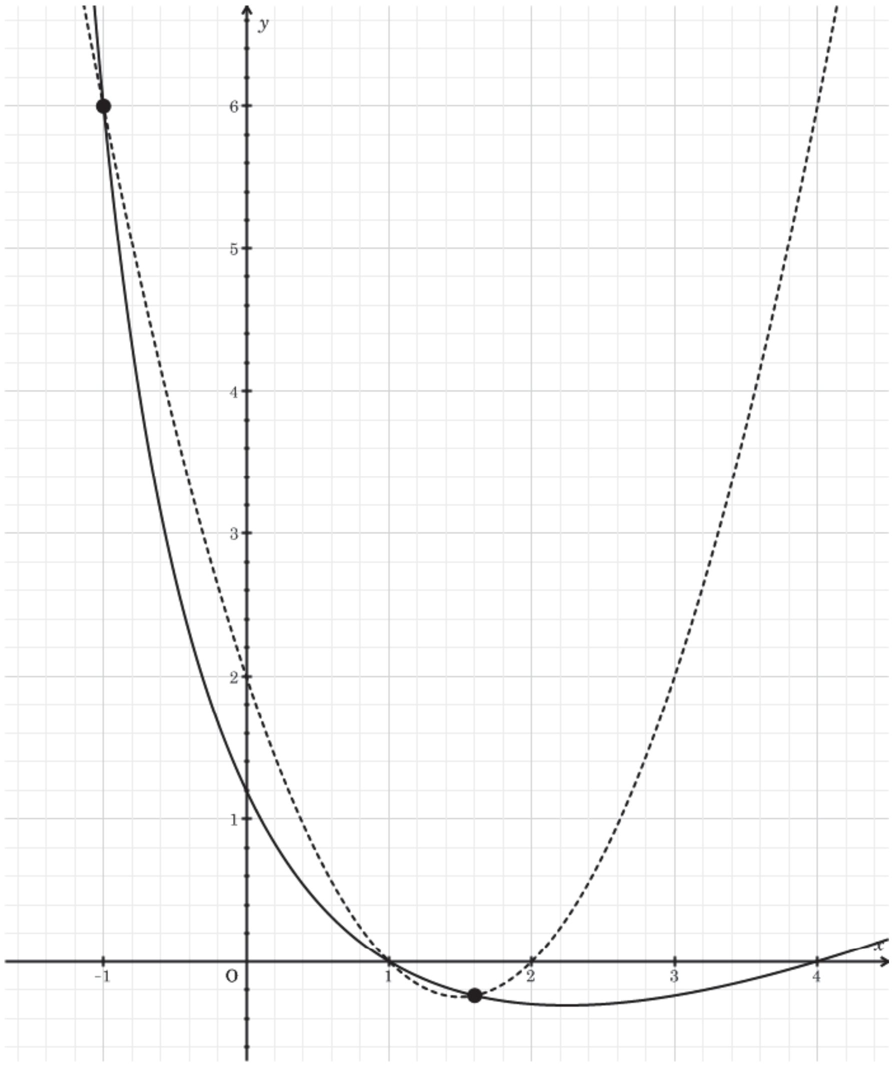
L'inéquation $g(x) > 0$ a pour ensemble solution $[-2\,;\,1[\,\cup\,]2\,;\,6]$

3.

i	2	3	4	5	6
A	0	2	6	12	20
S	2	3	4	4	4
S+1	3	4	5	5	5

Cet algorithme permet d'encadrer par 2 entiers consécutifs (4 et 5) une solution de l'équation $g(x) = 10$

4.



D’après le graphique, l′ensemble des solutions de l’inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ est :

$$\left]-2\,;\,x_1\right] \cup \left[1\,;\,x_2\right] \text{ avec } x_1 \approx -1 \text{ et } x_2 \approx 1{,}6.$$