2de9 **Correction de l'évaluation n°6**

Exercice n°1

Partie A : **1**. Le minimum de f sur I est -9 et le maximum de f sur I est 7.

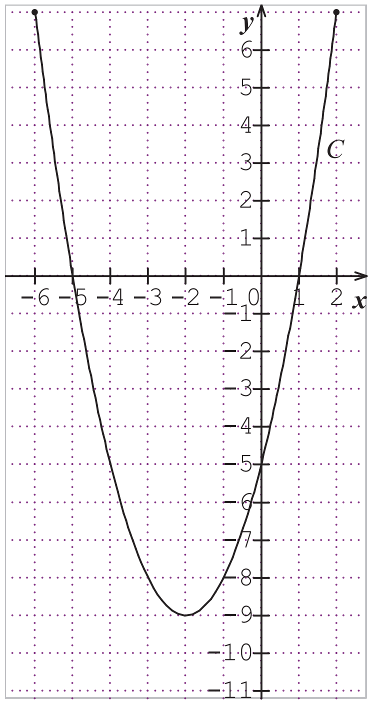
2. f est strictement croissante sur [-2 ; 1] donc comme 0<1, f(0) <f(1) ;
f est strictement décroissante sur [-5 ; -2] donc comme -5<-3, f(-5) >f(-3) ;
f est strictement décroissante sur [-5,5 : -3] donc comme -5,5 < -3 alors f(-5,5) > f(-3).

3. D'après le tableau de variation :
• Si $-5 \leq x \leq 2$ alors **-9** $\leq f(x) \leq$ **7**
• 0< f(-5,5) < 7

4. a et b sont deux nombres tels que $-6 \leq a < b \leq -2$.
f(a) > f(b) car f est strictement décroissante sur [-6 ; -2].

5. D'après le tableau de variation le tableau de signes de f(x) est :

x	-6 -5 1 2
Signe de f(x)	7 + 0 - 0 +



Partie B : **Lectures graphiques**.
La courbe C ci-contre représente la fonction f de la partie A

1. D'après le graphique :
a) f(x) = - 8 a deux solutions -3 et-1.
b) f(x) = - 5 a deux solutions -4 et 0. On a cherché les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation y = -5.

2 a) f(x) > 0 sur [-6 ; -5[$\cup$]1 ; 2]
b) f(x) < - 5 sur]-4 ; 0[. On a cherché les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite d'équation y = -5.
c) f(x) > -10 a pour ensemble de solution [-6 ; 2].

3. Soit la fonction g définie sur ℝ par g(x) = -2x -10 et soit D sa représentation graphique
a. D passe par A (0 ; -10) ; B(-2 ; -6) ; C (-4 ,- 2) .
b f(x) = g(x) a deux solutions -5 et 1.
c. f(x) < g(x) sur $\left]-5\,;-1\right[$. On a cherché les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite D

Partie C : On admet que f est la fonction f définie sur [-6 ; 2] par f(x) = (x-1)(x+5) et on rappelle que g(x) = -2x-10.

1. f(x) = (x-1)(x+5) = x² +5x – x – 5 = x^2 + 4x -5.
2.
a) f(x) = - 5 $\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$
b) f(x) > 0 $\Leftrightarrow (x-1)(x+5) > 0$.

Valeurs de x	-6 -5 1 2
Signe de x-1	- - 0 +
Signe de x+5	- 0 + +
Signe du produit	+ 0 - 0 +

D'après le tableau f(x) >0 sur $\left[-6\,;-5\right[\cup\left]1\,;2\right]$.
Le résultat obtenu est cohérent avec celui obtenu dans le 2.a.

3. f(x) – g(x) = x² +4x – 5 – (-2x – 10) = x² +6x +5
(x+1)(x+5) = x² +5x +x +5 = x² +6x +5 = f(x) – g(x).
Donc f(x) – g(x) = (x+1)(x+5).

Autre possibilité : f(x) – g(x) = x² +4x – 5 – (-2x – 10)
f(x) – g(x) = (x-1)(x+5) + 2(x +5)
f(x) – g(x) = (x+5)[(x-1) + 2] = (x+5)(x+1)

4. f(x) – g(x) = 0 $\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -5$
Les solutions de f(x) = g(x) sont -1 et -5..
On retrouve bien le résultat obtenu dans le 3°) b) de la partie B.

5. Etude du signe de f(x) – g(x).

Valeurs de x	-∞ -5 -1 +∞
Signe de x+1	- - 0 +
Signe de x+5	- 0 + +
Signe du produit	+ 0 - 0 +

D'après le tableau f(x) –g(x) < 0 sur $\left]-5\,;-1\right[$.
Le résultat obtenu est cohérent avec celui obtenu dans le 3°) c) de la partie B.

6. f(-2) = (-2)²-8-5=-9 donc -9 est atteint pour x = -2
pour tout réel x, f(x) – (-9) = f(x) +9 = x² +4x – 5 + 9 = x² + 4x + 4 = (x +2)².
Un carré est toujours positif donc pour tout réel x, (x +2)² ≥ 0
D'où pour tout réel x, f(x) + 9 ≥ 0
Soit pour tout réel x, f(x) $\geq$ -9 CQFD.

Exercice n°2 :

a) $\frac{4x^2-4x+1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (4x^2\text{-}4x+1 = 0 \text{ et } x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (2x-1)(2x-1) = 0 \text{ et } x \neq 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et } x \neq 2$

L'équation $\frac{4x^2-4x+1}{x-2}=0$ a une solution $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{x^2-3x+7}{x-3}=\frac{3x-2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+7}{x-3}-\frac{3x-2}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-3x+7)-(3x-2)}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+9}{x-3}=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{x-3}=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ et } x-3 \neq 0.$

L'équation $\frac{x^2-3x+7}{x-3}=\frac{3x-2}{x-3}$ n'a pas de solution.

c) $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+1}-\frac{2x}{x-2}=0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)}-\frac{2x(x+1)}{(x-2)(x+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-4x-3x+6-2x^2-2x}{(x+1)(x-2)}=0$

$\frac{-9x+6}{(x+1)(x-2)}=0 \Leftrightarrow (-9x+6 = 0 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 2) \Leftrightarrow (x=\frac{6}{9} \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 2)$

L'équation $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x}{x-2}$ a une solution $\frac{2}{3}$

Exercice n°3 :

a) $25x^2 > 9 \Leftrightarrow 25x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (5x-3)(5x+3) > 0.$

On peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

$5x-3=0 \Leftrightarrow 5x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$ **et** $5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
Signe de 5x + 3		-		-	0	+	
Signe de 5x - 3		-	0	+		+	
Signe du produit		+	0	-	0	+	

Conclusion : l'inéquation $25x^2 > 9$ a pour ensemble de solutions S = $\left]-\infty,-\frac{3}{5}\right[\cup \left]\frac{3}{5},+\infty\right[$

b) $\frac{x-2}{x+3} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3}-5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3}-\frac{5x+15}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-5x-15}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-17}{x+3} \geq 0$

On peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

$-4x-17=0 \Leftrightarrow -4x=17 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{4}$

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ **. –3 est valeur interdite.**

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{17}{4}$		-3		$+\infty$
Signe de -4x - 17		+	0	-		-	
Signe de x + 3		-		-	0	+	
Signe du quotient		-	0	+		-	

Conclusion : l'inéquation $\frac{x-2}{x+3} \geq 5$ a pour ensemble de solutions S = $\left[-\frac{17}{4},-3\right[$

Exercice n°4. *f* est la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$. (1)

Partie A :

1. L'équation f(x) = 0 a deux solutions $\dfrac{1}{3}$ et –2.

2. L'équation f(x) = -3 a une solution 1.

3. $\boxed{\textbf{f(x)} \geq \textbf{0 a pour ensemble de solutions S =} \left[-2, \frac{1}{3}\right]}$

Partie B.

1°) $-3 - \dfrac{5x-5}{x^2+1} = \dfrac{-3(x^2+1)}{x^2+1} - \dfrac{5x-5}{x^2+1} = \dfrac{-3x^2 - 3 - 5x + 5}{x^2+1} = \dfrac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2+1}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = -3 - \dfrac{5x-5}{x^2+1}}$ (2)

2°) $\dfrac{(1-3x)(x+2)}{x^2+1} = \dfrac{x + 2 - 3x^2 - 6x}{x^2+1} = \dfrac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2+1}$.

Conclusion : $f(x) = \dfrac{(1-3x)(x+2)}{x^2+1}$. (3)

3°) a) f(x) = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{(1-3x)(x+2)}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0$ ou x +2 = 0 et $x^2+1 \neq 0$

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$. Donc $x^2 + 1$ est forcement différent de zéro.

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation f(x) = 0 a deux solutions } \frac{1}{3} \text{ et } -2}$.

b) f(x) = -3 $\Leftrightarrow -3 - \dfrac{5x-5}{x^2+1} = -3 \Leftrightarrow -\dfrac{5x-5}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-5}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

c) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(1-3x)(x+2)}{x^2+1} \geq 0$: on peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ et $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

D'après le b) pour tout réel x, $x^2+1 > 0$

Valeurs de x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de 1 –3x		+		+	0	-	
Signe de x + 2		-	0	+		+	
Signe de x^2+1		+		+		+	
Signe du quotient		-	0	+	0	-	

Conclusion : $\boxed{f(x) \geq 0 \text{ a pour ensemble de solutions S =} \left[-2, \frac{1}{3}\right]}$