TD N° ….: EXEMPLES D'ETUDES DE FONCTIONS DEFINIES AVEC UN LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1 (bac cfe gsi 2009) : on considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 7] par :
$f(x) = 2x^2 - 20x + 40 + 16\ln(x)$

1. Soit f ' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [1 ; 7].
Calculer f '(x) puis montrer que $f'(x) = \dfrac{4(x-4)(x-1)}{x}$.

2. Etudier le signe de f '(x) sur l'intervalle [1 ; 7] et en déduire le tableau de variation de la fonction f .

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. On arrondira les résultats à l'unité.

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)							

4. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal.
On prendra pour unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Un artisan fabrique entre 1 et 7 poupées de collection par jour. Le coût unitaire de fabrication de x poupées, exprimé en euros, est égal à f(x) (x est compris entre 1 et 7).

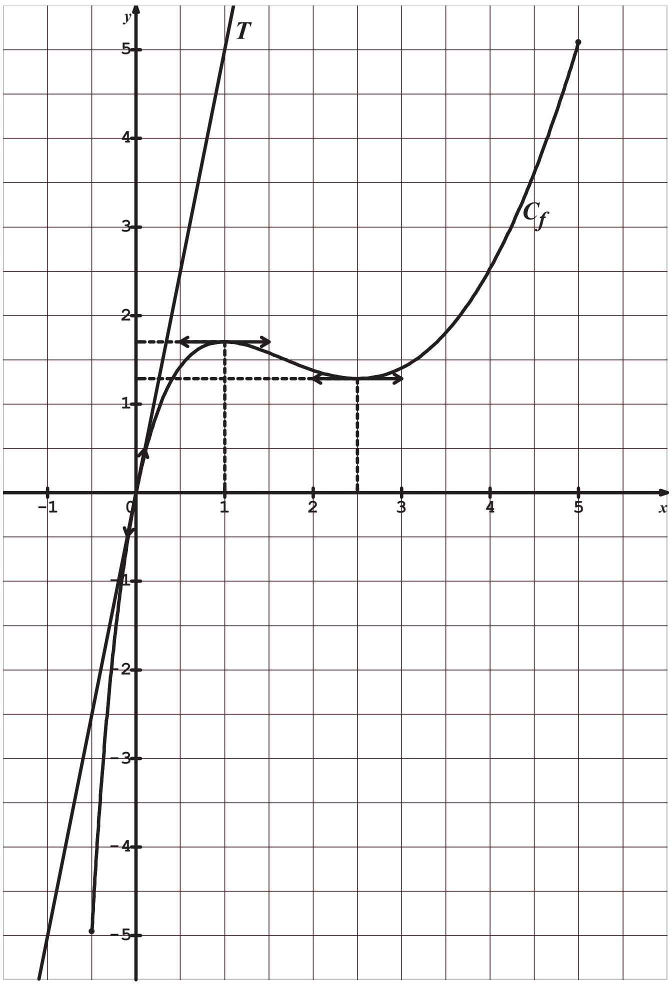
5. Combien faut-il produire de poupées pour que le coût unitaire de fabrication soit minimal ? Quel est ce coût minimal ?

6. Le prix de vente d'une poupée est de 20 euros.
Par lecture graphique, déterminer combien de poupées l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice.

Exercice 2 (5 points) (bac cfe gsi 2010)
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [-0,5 ; 5] par
$f(x) = x^2 - 9x + 14\ln(x+1)$.
Dans le repère ci-contre, la courbe C_f est sa courbe représentative.
On admet que la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle [-0,5 ; 5] et on note *f '* sa fonction dérivée.

Partie A : Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :
1. Déterminer f(0) et f '(0).
2. Donner le nombre de solutions de l'équation : f(x) = 1,5.

Partie B : **1**. Calculer f '(x).
2. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x-1)}{x+1}$.
3. En remarquant que (*x* +1) est strictement positif sur l'intervalle [-0,5 ; 5], et à l'aide d'un tableau de signes déterminer le signe de f'(x) puis les variations de f sur ce même intervalle.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.



Exercice n°3 (6 points) Antilles Guyane 2011

On considère la fonction *C* définie sur l'intervalle [2 ; 30] par :
$C(x) = 12x + 22 - 25\ln x$
Une usine de composants électroniques fabrique des haut-parleurs.
Le coût de production, en milliers d'euros, de *x* centaines de haut-parleurs est égal à $C(x)$, *x* est compris entre 2 et 30.

1. Sachant qu'une centaine de haut-parleurs est vendue 10milliers d'euros, donner (en milliers d'euros) le prix de vente de *x* centaines de haut-parleurs.

On considère la fonction *B* définie sur l'intervalle [2 ; 30] par $B(x) = -2x - 22 + 25\ln x$.
2. Montrer que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé sur la vente de *x* centaines de haut-parleurs est égal à $B(x)$.

3. On admet que *B* est dérivable sur l'intervalle [2 ; 30]. On note *B '* sa fonction dérivée.
a. Montrer que, pour tout réel *x* de l'intervalle [2 ; 30], $B'(x) = \dfrac{25-2x}{x}$.
b. Étudier le signe de *B'(x)*.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction *B*.
d. Pour quelle quantité de haut-parleurs vendue le bénéfice est-il maximal ?

4. a. Compléter le tableau de valeurs ci dessous.

x	2	4	6	10	12,5	14	20	24	30
B(x)									

b. Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative de la fonction *B*.

5. En utilisant le graphique, déterminer pour quelles quantités produites le bénéfice est supérieur à 10 000 €

Exercice 4 (4 points)(bac cfe gsi 2010)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, alors la note attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.*Les quatre questions sont indépendantes.*

1. Pour tout nombre réel *a* strictement positif, le nombre $ln(7 \times a)$ est égal à :

a. $7 \times ln(a)$ b. $ln(7) \times ln(a)$ c. $ln(7) + ln(a)$

2. Dans ℝ, l'équation $e^x - 5 = 0$ admet pour solution :

a. e^5 b. $ln(5)$ c. $5e$

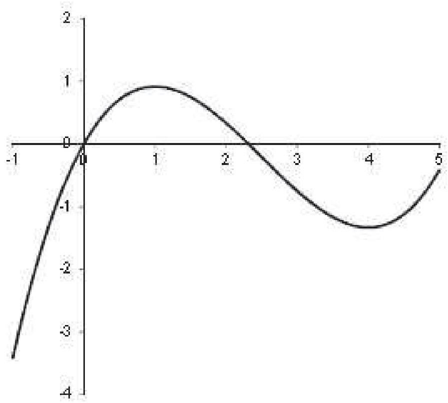
3. Dans cette question f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-1 ; 5] .

Dans le tableau suivant figure le signe de sa fonction dérivée f' sur [-1 ; 5] .

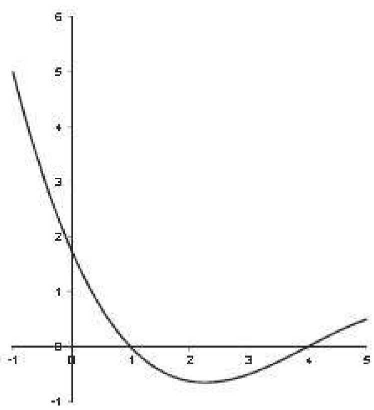
x	-1		1		4		5
Signe de f' (x)		+	0	–	0	+	

Parmi les trois courbes ci-dessous, la seule qui peut représenter la fonction *f* est :

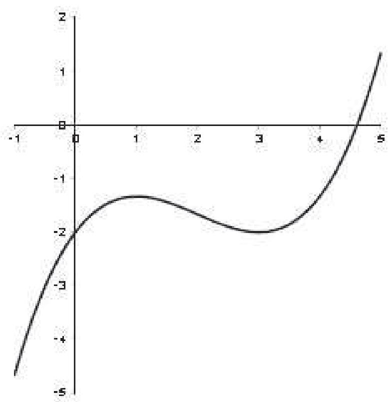
a.



b.



c.



4. Soit g la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par g(x) = ln (3x -6).
Soit *g'* la fonction dérivée de *g* sur $]2\,;+\infty[$. Pour tout *x* de $]2\,;+\infty[$:

a. g'(x) = $\dfrac{1}{3x-6}$ b. g'(x) = $3 \times ln(3x-6)$ c. g'(x) = $\dfrac{3}{3x-6}$.

Exercice n°5 **:** Soit la fonction f définie sur [0,2 ; 6] par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x} + 1$

a) Calculer f'(x)
b) Etudier le signe de f'(x) et en déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Déterminer pour quelle valeur de x, la fonction atteint son maximum et préciser la valeur de ce maximum.
e) Compléter le tableau de valeurs suivant (donner les valeurs de f(x) à 10^{-2} près).

x	0,2	0,5	1	1,5	2	4	6
f(x)							

f) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)
g) Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la solution de l'équation f(x) = 0.