

Exercice n°15 : une configuration classique.

$Q \in d'$ donc le projeté orthogonal de Q sur (AB) est N et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$

$P \in d$ donc le projeté orthogonal de P sur (AB) est M et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$

Par transitivité, on en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$

Exercice n°21 :

ABCD est un carré de coté a.

I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC].

a. • $\vec{u} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$ donc $\|\vec{u}\| = \left\| \frac{1}{a} \overrightarrow{AB} \right\| = \frac{1}{a} \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a} \times AB = \frac{1}{a} \times a = 1$;

$\vec{v} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD}$ donc $\|\vec{v}\| = \left\| \frac{1}{a} \overrightarrow{AD} \right\| = \frac{1}{a} \|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a} \times AD = \frac{1}{a} \times a = 1$.

ABCD est un carré donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$ donc le repère $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ est orthonormal.

• Les coordonnées de A sont (0 ; 0),

$\vec{u} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + 0\vec{v}$ donc B (a, 0)

$\vec{v} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AD} = 0\vec{u} + a\vec{v}$ donc D (0 ; a).

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = a\vec{u} + a\vec{v}$ d'où C(a ; a).

I milieu de [AB] donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + a}{2} = \frac{a}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$ donc I $\left(\frac{a}{2} ; 0 \right)$

J milieu de [BC] donc $x_J = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{a + a}{2} = a$ et $y_J = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + a}{2} = \frac{a}{2}$ donc J $\left(a ; \frac{a}{2} \right)$

b. $\overrightarrow{CI} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - a \\ 0 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DJ} = \begin{pmatrix} a - 0 \\ \frac{a}{2} - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$

c. donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = -\frac{a}{2} \times a + (-a) \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$ donc les droites (CI) et (CJ) sont perpendiculaires.

Exercice n°22 :

a) BC = 10 cm, AH = $4\sqrt{3}$ cm et BH = 4 cm avec H $\in$ [BC],

H est le pied de la hauteur issue de A donc H est le projeté orthogonal A sur (BC) donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = -HB \times BC = -4 \times 10 = -40$

b) AB = 8 cm, BC = 10 cm et $\widehat{ABC} = 60^\circ$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \times BC \times \cos \hat{B} = -8 \times 10 \times \frac{1}{2} = -40$

c) AB = 8 cm, BC = 10 cm et AC = $2\sqrt{21}$ cm. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(8^2 + 10^2 - 2^2 \times 21) = -40$

d) A (0 , $4\sqrt{3}$), B (-4 ; 0) et C(6 ; 0). $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times 10 - 4\sqrt{3} \times 0 = -40$