Exercices d'entraînement pour le contrôle commun de mathématiques.
Correction des exercices 1 et 2.

Exercice 1 : (v_n) est la suite définie sur É par $v_n = n + \dfrac{1}{2n-1}$

1. Pour tout entier n , $v_{n+1} - v_n = (n+1) + \dfrac{1}{2(n+1)-1} - n - \dfrac{1}{2n-1} = 1 + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1}$

Soit $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} + \dfrac{2n\text{-}1}{(2n+1)(2n-1)} - \dfrac{2n+1}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{4n^2-1+2n-1-2n-1}{4n^2-1}$

Conclusion : $\boxed{v_{n+1} - v_n = \dfrac{4n^2-3}{4n^2-1}}$.

2. Pour déterminer le sens de variation de la suite (v_n) on étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = \dfrac{4n^2-3}{4n^2-1}$

1ère méthode :

Pour tout entier n Ã 1 :
la fonction carrée étant croissante sur [0 ; +∞[, n^2 Ã 1.
en multipliant par 4 qui est positif, on en déduit que $4n^2$ Ã 4 .
en ajoutant -3, on obtient $4n^2$-3 Ã 1 et en ajoutant -1, on obtient $4n^2$-1 Ã 3.
On est donc assuré que pour tout entier n Ã 1, $\dfrac{4n^2-3}{4n^2-1} > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs.
Soit que pour tout entier n Ã 1, $v_{n+1} - v_n > 0$.
Donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang 1.
De plus $v_0 = -1$, $v_1 = 2$ donc $v_0 < v_1$
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante}}$

2ième méthode :
On peut aussi étudier le signe de la fonction f, définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{4x^2-1}$ à l'aide d'un tableau de signes.

$4x^2-3=0$ ñ $(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}) = 0$: l'équation $4x^2-3=0$ a une seule solution dans [0 ; +∞[qui est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$4x^2-1 = 0$ ñ $(2x-1)(2x+1) = 0$: l'équation $4x^2-1 = 0$ a une seule solution dans [0 ; +∞[qui est $\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{2}$ est valeur interdite pour f.

Rappel : $4x^2-3$ est du signe de a = 4 , c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines ($\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et -$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) et du signe de –a, c'est-à-dire négatif, à l'intérieur des racines.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		+∞
$4x^2-3$		-	|	-	0		+		
$4x^2-1$		-	0	+	|		+		
$f(x)$		+	||	-	0		+		

D'après le tableau $\dfrac{4x^2-3}{4x^2-1} > 0$ sur]$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; +∞[. Or $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc à fortiori $\dfrac{4x^2-3}{4x^2-1} > 0$ sur [1 ; +∞[.

Or $v_{n+1} - v_n = \dfrac{4n^2-3}{4n^2-1}$ donc pour tout n Ã 1, $v_{n+1} - v_n > 0$
On en déduit que la suite (v_n) est croissante à partir du rang 1.
De plus $v_0 = -1$ et $v_1 = 2$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante}}$.

3. a) Deux possibilités :

• Utilisation du menu RECUR de la suite (par tâtonnement en modifiant les paramètres de la table au fur et à mesure que l'on se rapproche de la bonne réponse).

Remarque : à partir de n = 100, la calculatrice donne dans le tableau $v_n = n$, ce qui est faux.
Il faut placer le curseur sur la colonne a_n et en bas à droite de l'écran on obtient la valeur exacte sous forme de fraction ou forme décimale (touche F↔D).

Par exemple : $v_{100} = 100 + \frac{1}{199} = \frac{19901}{199}$ ó 100,005.

Explication : $v_n = n + \frac{1}{2n-1}$: lorsque n devient grand, $\frac{1}{2n-1}$ devient proche de 0 et devient négligeable par rapport à n.

A l'aide de la calculatrice, on donc peut conjecturer que :
(1) pour $n = 1000$, v_n est légèrement plus grand que 1000
(2) le plus petit entier naturel n tel que v_n Ã 1000 est n = 1000.

• Deuxième possibilité : utilisation du programme SEUILEX1 en modifiant deux lignes (premier terme, et formule explicite de la suite).
En effet, il s'agit ici d'une **recherche de seuil, dans le cas d'une suite explicite de limite +∞**

Langage Casio	Langage TI	
= = = = = SEUILEX1 = = = = = =		
0 → N ↵	: 0 → N	
-1→ U ↵	: -1→ U	Ligne à modifier
"A = " :?→ A ↵	: Prompt A	
While U < A↵	: While U < A	
N+1→ N ↵	: N+1→ N	
$N + \frac{1}{2N+1}$ → U ↵	: $N + \frac{1}{2N+1}$ → U	Ligne à modifier
WhileEnd↵	: End	
N◢	**:** Disp N■	

On entre A = 1000 et on obtient N = 1000, ce qui permet de conjecturer que :
le plus petit entier naturel n tel que v_n Ã 1000 est n = 1000.

b) Par le calcul :

1ère méthode : $v_{999} = 999 + \frac{1}{1997}$. $0 < \frac{1}{1997} < 1$ donc $999 < 999 + \frac{1}{1997} < 1000$. D'où $v_{999} < 1000$

$v_{1000} = 1000 + \frac{1}{1999}$. $0 < \frac{1}{1999}$ donc $1000 < 1000 + \frac{1}{1999}$. D'où $1000 < v_{1000}$.

De plus comme on a démontré que la suite est croissante, on est assuré que pour tout n Ã 1000, v_n Ã v_{1000} Ã 1000

Conclusion : $\boxed{\text{le plus petit entier naturel n tel que } v_n \text{ Ã 1000 est n = 1000}}$.

2ième méthode :

v_n Ã 1000 ñ $n + \frac{1}{2n-1}$ Ã 1000 ñ $\frac{2n^2-n+1}{2n-1} - 1000$ Ã 0 ñ $\frac{2n^2-2001n+1001}{2n-1}$ Ã 0

Pour n Ã 1, $2n-1 > 0$ donc v_n Ã 1000 ñ $2n^2-2001n+1001$ Ã 0 .

Soit Δ le discriminant de $2x^2-2001x+1001$: $\Delta = (-2001)^2-4\times2\times1001 = 3995993$

$\Delta > 0$ donc $2x^2-2001x+1001$ a deux racines $x_1 = \frac{2001+\sqrt{3995993}}{4} \approx 999{,}99$ et $x_2 = \frac{2001-\sqrt{3995993}}{4} \approx 0{,}5005002$

x	0	$\frac{1}{2}$	x_2		x_1		$+\infty$
$2x^2-2001x+1001$	+		0	-	0	+	

D'après le tableau : pour tout x Ã x_1 , $2x^2-2001x+1001$ Ã *0.*
Or $x_1 \approx$ 999,99 donc pour tout entier n Ã 1000, $2n^2-2001n+1001$ Ã 0 et donc v_n Ã 1000

Conclusion : $\boxed{\text{à partir de } n = 1000,\ v_n \text{ Ã 1000}}$.

4.
Variables : n , u
Initialisation : u prend la valeur -1
n prend la valeur 0
Traitement : lire M
Tant que u < 1000
| n prend la valeur n+1
| u prend la valeur n+1/(2n-1)
Fin Tant que
Sortie: Afficher n

Exercice 2

1. Pour tout entier n, $u_n = 3n^2 - 4$.

1ère méthode.

Pour déterminer le sens de variation de la suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1)^2 - 4 - (3n^2 - 4) = 3n^2 + 6n + 3 - n^2 = 6n + 3$

$6n + 3 > 0$ ñ $6n > -3$ ñ $n > -\frac{1}{2}$. Cette dernière inégalité est vérifiée quel que soit l'entier n donc pour tout n∈É, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite u est croissante}}$.

Autre possibilité : pour tout entier n , n Ã 0 donc 6n Ã 0 donc 6n+3 Ã 3 > 0.

2^{ième} méthode.

La suite étant explicite, on peut étudier le sens de variation de la fonction associée.
Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - 4$.
f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = 6x$. f' est positive sur $[0,+\infty[$ donc f' est croissante sur $[0,+\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite u est croissante}}$.

2. $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n^2 + 3}$
donc pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = -\sqrt{u_n^2 + 3}$
or ∀ n ∈ É, u_n^2 Ã 0 donc $u_n^2 + 3$ Ã 3 > 0
la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $\sqrt{u_n^2+3}$ Ã $\sqrt{3} > 0$
On en déduit que pour tout entier n $-\sqrt{u_n^2+3} < 0$, soit que $u_{n+1} - u_n < 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite u est strictement décroissante}}$.

3. $u_n = (-3)^n$.

1ère méthode : (utilisation d'un contre exemple pour démontrer que la suite n'est ni croissante, ni décroissante)

$u_0 = (-3)^0 = 1$; $u_1 = (-3)^1 = -3$ donc $u_0 > u_1$
$u_2 = (-3)^2 = 9$ donc $u_1 < u_2$.
On en déduit que la suite est ni croissante, ni décroissante.

2^{ième} méthode :

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = (-3)^{n+1} - (-3)^n = (-3)^n \times (-3) - (-3)^n \times 1 = (-3)^n(-3-1) = -4(-3)^n$
si n est pair , alors $(-3)^n > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$
si n est impair , alors $(-3)^n < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$
Conclusion : $\boxed{\text{la suite n'est pas monotone}}$.