1S : Correction du DM pour le 25 avril 2012

Exercice n°1 : on considère une suite (v_n) de premier terme $v_0 = a$ et vérifiant la relation de récurrence : $\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 4}{3v_n + 2} \end{cases}$

a) $v_0 = a$; $v_1 = \dfrac{2v_0 - 4}{3v_0 + 2} = \dfrac{2a-4}{3a+2}$;

$$v_2 = \frac{2v_1-4}{3v_1+2} = \frac{2\dfrac{2a-4}{3a+2} - 4\dfrac{3a+2}{3a+2}}{3\dfrac{2a-4}{3a+2} + 2\dfrac{3a+2}{3a+2}} = \frac{\dfrac{4a-8}{3a+2} - \dfrac{12a+8}{3a+2}}{\dfrac{6a-12}{3a+2} + \dfrac{6a+4}{3a+2}} = \frac{\dfrac{4a-8-12a-8}{3a+2}}{\dfrac{6a-12+6a+4}{3a+2}} = = \frac{\dfrac{-16-8a}{3a+2}}{\dfrac{12a-8}{3a+2}} = \frac{-4(4+2a)}{4(3a-2)} = \frac{-4-2a}{3a-2}$$

$$v_3 = \frac{2v_2-4}{3v_2+2} = \frac{2\dfrac{-4-2a}{3a-2} - 4\dfrac{3a-2}{3a-2}}{3\dfrac{-4-2a}{3a-2} + 2\dfrac{3a-2}{3a-2}} = \frac{\dfrac{-8-4a}{3a-2} - \dfrac{12a-8}{3a-2}}{\dfrac{-12-6a}{3a-2} + \dfrac{6a-4}{3a-2}} = \frac{\dfrac{-16a}{3a-2}}{\dfrac{-16}{3a-2}} = a$$

. On constate que $v_3 = v_0$

$v_4 = \dfrac{2v_3-4}{3v_3+2} = \dfrac{2v_0-4}{3v_0+2} = v_1$, $v_5 = \dfrac{2v_4-4}{3v_4+2} = \dfrac{2v_1-4}{3v_1+2} = v_2$.

Conclusion : pour tout entier n, $v_{n+3} = v_n$. On dit que la suite est périodique de période 3.

Exercice n°2 : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{n(n+1)}$

1ère méthode : on multiplie le premier quotient par n et le deuxième quotient par n+2 (le plus petit dénominateur commun est n(n+1)(n+2) et non n(n+1)(n+2)(n+1))

D'où : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)n} - \dfrac{n+2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{-2}{(n+1)(n+2)n}$.

n est un entier naturel non nul donc n > 0, n+1 > 0, n+2 >0, -2 < 0 donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} < u_n$. Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

2ième méthode : 0<2 donc pour tout entier n non nul, 0<n<n+2 .
En multipliant par n+1 qui est strictement positif, on a donc n(n+1) < (n+2)(n+1).

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)} < \dfrac{1}{n(n+1)}$. Autrement dit $u_{n+1} < u_n$

Autres méthodes possibles :

- Comme pour tout entier n, $u_n > 0$, on aurait pu démontrer que pour tout entier naturel non nul $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- Comme la suite est explicite, on aurait pu aussi démontrer que la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ est négative sur $]0,+\infty[$, on en aurait déduit que la fonction f décroissante sur $]0,+\infty[$

Exercice n°3 : u est la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -0{,}02n^3 + 0{,}21n^2$.

a) On peut affirmer que *u* est croissante de n=0 à n = 7. Après n =7, on ne sait pas !

b) *f* est définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}21x^2$

A	B
n	u(n)
0	0
1	0,19
2	0,68
3	1,35
4	2,08
5	2,75
6	3,24
7	3,43

c) Pour tout réel *x* de [0 ; +∞[, $f'(x) = -0{,}02 \times 3x^2 + 0{,}21 \times 2x = -0{,}06x^2 + 0{,}42x = x(-0{,}06x + 0{,}42)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } -0{,}06x + 0{,}42 = 0) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{0{,}42}{0{,}06} = 7\right)$

On sait que $-0{,}06x^2 + 0{,}42x$ est du signe de a = -0,06, c'est-à-dire négatif à l'extérieur des racines puis positifs à l'intérieur des racines.
On a donc le tableau de variation :

x	0		7		+∞
f'(x)		+		-	
f(x)	0	↗	f(7)	↘	

la suite *u* est donc croissante de *n* = 0 à 7 puis à partir de *n* = 7, *u* est décroissante.

Exercice n°4 : question roc

1. (u_n) est une suite à termes strictement positifs telle que pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Comme la suite u est une suite à termes strictement positifs, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par u_n sans changer le sens de l'inégalité .

D'où $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

2. Application : pour tout entier naturel, n : $11 \times \frac{6^n}{17^{n+5}} > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{11 \times \frac{6^{n+1}}{17^{n+1+5}}}{11 \times \frac{6^n}{17^{n+5}}}$. On peut simplifier par 11 ;

De plus on sait que pour tout réel a, $a^{n+1} = a^n \times a^1 = a^n \times a$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{6^n \times 6}{17^{n+5} \times 17}}{\frac{6^n}{17^{n+5}}} = \frac{6}{17}$

Donc pour tout entier n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{6}{17} - 1 = -\frac{11}{17}$ <0 . Conclusion : $\boxed{\text{la suite v est décroissante}}$.

Exercice n°5 ***:*** Soit $u_n = n + 8\sin(n)$ pour $n \geq 0$.

a. Le premier indice n pour lequel $u_n \geq 40$ est 33 : $u_{33} \approx 40{,}999$.

Les termes suivants ne sont pas tous supérieurs où égaux à 40 : par exemple $u_{34} \approx 38{,}233$

b. Pour tout entier n , $-1 \leq \sin(n)$; donc $-8 \leq 8\sin(n)$; donc $n - 8 \leq n + 8\sin(n)$.

Si $48 \leq n$ alors $40 \leq n - 8$. Conclusion : $\boxed{\text{si } 48 \leq n \text{ alors } 40 \leq u_n \text{ .}}$

c. Pour tout entier n, $n - 8 \leq u_n$, donc si $108 \leq n$ alors $100 \leq u_n$.

De même si $1008 \leq n$ alors $1000 \leq u_n$; si $10^{10} + 8 \leq n$ alors $10^{10} \leq u_n$; si $M + 8 \leq n$ alors $M \leq u_n$.

d. On peut donc rendre u_n aussi grand que l'on veut. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

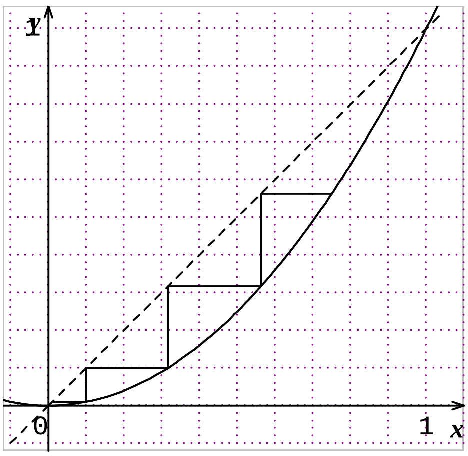
Exercice n°6 : : la suite u est définie par son premier terme $u_0 = \frac{3}{4}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n{}^2$

a)

n	0	1	2	3
u_n	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16} = 0{,}5625$	$\frac{81}{256} = 0{,}31640625$	$\frac{6561}{65536} = 0{,}100112915$

b) voir figure : la fonction f est la fonction carrée sur $[0 ; +\infty[$

c) $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ … D'après le graphique on peut conjecturer que la suite est strictement décroissante.



d) Soit x un élément de I : $0 < x < 1$;

On sait que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ (cf chapitre 4)

Donc pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 1[$, $0 < x^2 \leq x < 1$

Conclusion : $\boxed{\text{f(x) appartient à I}}$.

D'après ce qui précède comme $u_0 \in]0 ; 1[$, $u_1 \in]0 ; 1[$.

De proche en proche, on en déduit que pour tout entier n, $u_n \in]0 ; 1[$.

$0 < u_n < 1$ donc $0 < u_n{}^2 \leq u_n$ (cf ci-dessus).

Conclusion : $0 < u_{n+1} \leq u_n$ ce qui prouve que la suite est décroissante.

e) On peut conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice n°7 : **1.** $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}}$ **.**

Pour tout entier naturel n, $-\frac{1}{2^{n+1}}$ <0. La suite est donc décroissante.

2. On peut conjecturer que u_n se rapproche de zéro lorsque n devient grand

3. Pour tout entier n, $0 < u_n$; $u_9 \approx 0{,}00195$ donc $u_9 > 10^{-3}$ et $u_{10} \approx 0{,}000977$ donc $u_{10} < 10^{-3}$.

Comme la suite est décroissante on a donc :

pour tout entier n ≥ 10 , $u_n \leq 10^{-3}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier n } \geq 10 \text{ , } 0 < u_n \leq 10^{-3}}$.

4 .

```
VARIABLES :          n, u, nombre.
INITIALISATION  :    n prend la valeur 0.
                     u prend la valeur 1.

TRAITEMENT :         Tant que u ≥ 10^-80 faire
                         n prend la valeur n+1.
                         u prend la valeur (1/2)^n.
                     FinTant que
SORTIE :             Afficher n
```

On teste avec le programme SEUILEX2 : L =0 et e = 10^{-80}.

On obtient n = 266.