TSTI **Correction de l'évaluation n°5 (1 heure 50)**

Note la plus haute : Note la plus basse : Moyenne de la classe :

Exercice n°1 : P est la fonction polynôme, définie sur ℝ par P(x) = $4x^3 - 8x^2 - x + 2$

1.P(2) = $4\times 2^3 - 8\times 2^2 - 2 + 2 = 32 - 32 + 4 - 2 + 2 = 0$

Théorème : **si un polynôme s'annule pour x = a, alors on peut mettre x – a en facteur dans ce polynôme : il existe un polynôme Q(x) tel que P(x) = (x – a) Q(x).**

P(2) = 0 donc P(x) est factorisable par x -2 et P(x) = (x -2)Q(x) où Q(x) est un polynôme à déterminer.

P est de degré 3 donc Q(x) est un polynôme de degré 2 c'est à dire Q(x) = ax^2 + bx + c où a, b, c sont trois réels à déterminer.
Donc P(x) = (x - 2) (ax^2 + bx + c)

Théorème d'identification :   **Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux**

D'après le théorème d'identification a= 4 et c = -1 d'où P(x) = (x - 2) ($4x^2$ + bx -1) où b est un réel à déterminer.
Je développe et j'ordonne : P(x) = $4x^3 + bx^2 - x - 8x^2 - 2bx + 2 = 4x^3 + (b - 8)x^2 + (-1 - 2b)x + 2$.
Donc toujours d'après le théorème d'identification :
b - 8 = -8 et -1 - 2b = -1 donc b = 0.

Conclusion : $\boxed{P(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)}$.

P(x) = 0 ⇔ (x -2) ($4x^2$ -1) =0 ⇔ (x -2) = 0 ou ($4x^2$ -1)=0. Or $4x^2 - 1$ est une identité remarquable : $4x^2 - 1=(2x-1)(2x+1)$

Conclusion : $\boxed{P(x) = 0 \text{ a trois solutions } 2,\ \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}}$.

2. D'après le 1°) $4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = -\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x = e^2$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e^{-\frac{1}{2}}$

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation a trois solutions } e^2, e^{\frac{1}{2}} \text{ et } e^{-\frac{1}{2}}}$.

Exercice n°2 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle] -3 ; 2 [par : $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$.

1. Rappel :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.   La fonction f définie sur I par f(x) = ln [u(x)] est dérivable sur I et f'(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$. On pose $u(x) = ax^2 + bx + c$, donc u'(x) = 2ax+ b.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de }]-3 ; 2[,\ f'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}}$.

2.
a. Traduire les données ci-dessous par des relations entre a, b et c.
• La courbe C passe par le point A (0 ; ln6) donc f(0) = ln6.
Or f(0) = lnc donc lnc = ln6.
Rappel : Pour x> 0 et y > 0 on a : ln x = ln y ⇔ x = y. Conclusion : c = 6.

• La courbe C passe par le point B $\left(-\frac{1}{2}; 2\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ donc $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right] = \ln\frac{25}{4}$.

Or $f(-\frac{1}{2}) = \ln\left(a\times\frac{1}{4} - b\times\frac{1}{2} + 6\right) = \ln\left(\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{24}{4}\right)$. On en déduit que a-2b+24=25, c'est à dire que a-2b = 1

• Au point B, la courbe C admet une tangente horizontale donc $f'(-\frac{1}{2}) = 0$.

Or $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2a\times\left(-\frac{1}{2}\right) + b}{a\times\frac{1}{4} + b\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 6} = \dfrac{-a + b}{a\times\frac{1}{4} + b\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 6}$. On en déduit que –a+b = 0.

b. $\begin{cases} c = 6 \\ -a + b = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$ donc -b = 1, c'est à dire b = -1. et a = -1.

Conclusion : a= -1, b = -1, c= 6 et $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$.

Problème : (d'après bac ge, polynésie française 2007)

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire g

g est la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln(x)$.

1. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2+3x-4\right) = -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(4\ln x\right) = -\infty\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3x-4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

2. $g'(x) = 2x + 3 + 4 \times \dfrac{1}{x}$. Conclusion : $\boxed{g'(x) = \dfrac{2x^2+3x+4}{x}}$.

3. Soit Δ le discriminant de $2x^2+3x+4$: $\Delta = 9 - 32 = -23$

$\Delta < 0$ donc $2x^2+3x+4$ est du signe de a = 2, c'est à dire positif pour tout réel x.
de plus x est strictement positif sur] 0 ; + ∞ [
On obtient donc le tableau de variation ci contre

x	0	$+\infty$
$2x^2+3x+4$	+	
x	+	
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. $g(1) = 1 + 3 - 4 + 4\ln(1) = 0$.
Conclusion : d'après les variations de g
sur] 0 ; 1 [, g(x) <0, sur] 1 ; +∞ [, g(x) >0.

Partie B : Etude de la fonction *f* : f est la fonction définie sur]0;+∞ [par : $f(x) = x + 3\ln(x) - \dfrac{4\ln x}{x}$.

1. a. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-4\ln x}{x} = 0 \text{ (cf formulaire)}\end{array}\right\}$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b. f(x) = $x + 3\ln(x) - \dfrac{4\ln x}{x}$ = $x + 3\times\ln(x) - \dfrac{4}{x}\times\ln x$ = $x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{4}{x} = -\infty \text{ donc par somme } \lim\limits_{x\to 0^+}\left(3-\dfrac{4}{x}\right) = -\infty\end{array}\right\}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$. Conclusion : par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
On en déduit que la droite d'équation *x* = 0 est asymptote verticale à la courbe C.

2) Etude des variations de *f*.

a) $f'(x) = 1 + 3\times\dfrac{1}{x} - \dfrac{\frac{4}{x}\times x - 4\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2} - \dfrac{4-4\ln x}{x^2} == \dfrac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Conclusion : $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$

b) f '(x) est donc du signe de g(x) , on en déduit les variations de f :
Sur]0;+∞ [, x^2 est strictement positif.
On sait que g(1) = 0 et que :
sur] 0 ; 1 [, g(x) <0, sur] 1 ; +∞ [, g(x) >0.
On obtient donc le tableau de variation ci contre :

x	0		1		$+\infty$
Signe de f'(x)	‖	-	0	+	
Variations de f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

f(1)= $1 + 3\ln(1) - \dfrac{4\ln 1}{1} = 1$

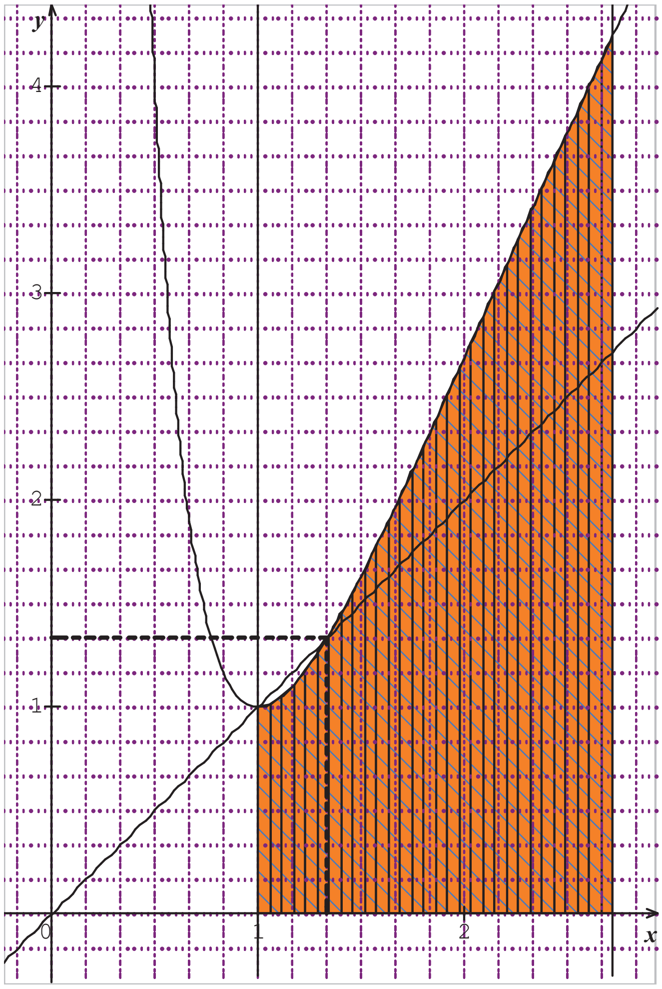
3. Pour tout x de] 0 ; +∞ [,f(x) = $x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

f(x) = x $\Leftrightarrow x + \left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x = x \Leftrightarrow \left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x = 0 \Leftrightarrow \left(3-\dfrac{4}{x}\right) = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0$ ou $x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = 1$

4. Tableau de valeurs pour la courbe C

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	18,27	3,97	1	1,64	2,69	3,78	4,83	5,83
OM en cm		11,91	3	4,92	8,07	11,34	14,49	17,49

5. Les solutions de l'équation f(x) = x sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation y = x.



Partie C. Calcul d'une primitive

1) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$.

On sait que $(u^2)' = 2u'u$, on en déduit que

$$F'(x) = \frac{2x}{2} - 3 + 3\ln x + 3x \times \frac{1}{x} - 2 \times 2(\ln x) \times \frac{1}{x}.$$

Soit $F'(x) = x - 3 + 3\ln x + 3 - \frac{4\ln x}{x} = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$

On constate que F' = f donc F est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) a) voir figure

b) $F(e) = \frac{1}{2}e^2 - 3e + 3e\ln e - 2(\ln e)^2 = \frac{1}{2}e^2 - 2$

$F(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 - 3 + 3\ln 1 - 2(\ln 1)^2 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

$F(e) - F(1) = \frac{1}{2}e^2 - 2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$ u.a. où u.a est l'unité d'aire associée au repère

L'unité de longueur sur chaque axe est de 3 cm donc l'unité d'aire est 9cm².

Donc $F(e) - F(1) = 9\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)$ cm² ≈ 37,75 cm².