TSTL **Correction de l'évaluation n°5**

Exercice n°1 : **1**) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$ alors pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)$ on ne peut pas conclure directement : **réponse B**.

2) La courbe de la fonction f définie sur]3, +∞ [par $f(x) = \dfrac{2}{x-3}+1$ admet une asymptote d'équation x = 3 : **réponse C**.

3) La courbe de la fonction f définie sur]0, +∞ [par $f(x) = -\dfrac{2}{x}+2$ admet une asymptote d'équation y = 2 : **réponse A**.

4) La courbe de la fonction f définie sur]-∞ ; 0 [par $f(x) = 3x - 1 + \dfrac{5}{x}$ admet une asymptote d'équation y = 3x -1 : **réponse C**.

Exercice n°2 :

1°) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et –5 <0 donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4}{x^3}\right) = 0^-$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^3} = 0^-$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{-5x} = -\infty$ et 2 > 0 donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{-5x} = -\infty$

2°) a) $\lim\limits_{x\to0}\left(3x^2-2x+4\right) = 3\times0^2-2\times0+4 = 4$

b) $\lim\limits_{x\to0^-} -\dfrac{3}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}(x-2) = -2$ donc par somme de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}\left(x-2-\dfrac{3}{x}\right) = +\infty}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+4) = -\infty$ donc par somme de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3x+4\right) = -\infty}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3+3 = +\infty$. Donc par somme de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-5x^3+3\right) = +\infty}$.

e)

$\lim\limits_{x\to3}(4-3x) = -5$. De plus $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3) = 0^-$ car

x	3	+∞
x-3	- 0 +	

Donc $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$. Donc par produit des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{4-3x}{x-3} = +\infty}$.

f) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{5-3x}{-2x^2-x+3}$

a) Limite en 1

$f(x) = (5-3x)\times\dfrac{1}{-2x^2-x+3}$. $\lim\limits_{x\to1}(5-3x) = 5-3\times1 = 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1}(5-3x) = 2}$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to1}\left(-2x^2-x+3\right) = -2\times1-1+3 = 0$.

Pour déterminer la limite du quotient, il faut déterminer le signe de $-2x^2 -x +3$

Etude du signe de $-2x^2 -x +3$: 1 est racine de $-2x^2 -x +3$ donc $-2x^2 -x +3$ est factorisable par $x-1$.

Donc $-2x^2 -x +3 = (x-1)(-2x-3)$ et $-\dfrac{3}{2}$ est l'autre racine.

$-2x^2 -x +3$ est du signe de a = -2, c'est à dire négatif à l'extérieur des racines et du signe de –a, c'est à dire positif à l'intérieur des racines. D'où le tableau :

valeurs de x	$-\frac{3}{2}$	1	+∞
signe de $-2x^2 -x +3$	- 0 +	0 -	

D'après le tableau : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(-2x^2-x+3\right) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{-2x^2-x+3} = -\infty}$ **(2)**

Donc par produit des limites **(1)** et **(2)** $\lim\limits_{x\to1^+} (5-3x)\dfrac{1}{-2x^2-x+3} = -\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty}$ **et la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe.**

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}(5-3x) = 5+\dfrac{9}{2} = \dfrac{19}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}(5-3x) = \dfrac{19}{2}}$ **(3)**

D'après le tableau : $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}\left(-2x^2-x+3\right) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} \dfrac{1}{-2x^2-x+3} = -\infty}$ **(4)**

Donc par produit des limites **(3)** et **(4)** $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} (5-3x)\dfrac{1}{-2x^2-x+3} = -\infty$

Exercice n°3 : f est la fonction définie sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{5-2x}$.

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5-2x) = -\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5-2x} = 0$;

Conclusion : la droite d'équation y = 0, c'est à dire l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe

2°) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^+} 5-2x = 0^-$ car

x		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
5-2x	+	0	-	

donc $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^+} \frac{1}{5-2x} = -\infty$. Conclusion : la droite d'équation x = $\frac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe.

Exercice n°4 : f est la fonction définie sur]- ∞ ; +∞ [par $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$. On ne peut pas conclure directement pour la somme

$$f(x) = 3x^3\left(1 + \frac{2x^2}{3x^3} - \frac{3}{3x^3}\right) = 3x^3\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^3} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^3}\right) = 1$. Conclusion : par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice n°5 : f est la fonction définie sur]- ∞ ; +∞ [par $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + 3x + 1}$.

$$f(x) = \frac{3x^2\left(1 - \frac{x}{3x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{3x}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{3x}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = 1$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3}$

Exercice n°6 : Soit f la fonction définie sur]- ∞ ; 2[par $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2}$.

$$f(x) - (x+5) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2} - (x+5) = = \frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2} - \frac{(x+5)(x-2)}{x-2} = \frac{x^2 + 3x + 4 - x^2 - 3x + 10}{x - 2} = \frac{14}{x-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{14}{x-2}\right] = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite D d'équation y = x+5 est asymptote oblique à la courbe en } -\infty.}$

Exercice n°7 : f est la fonction définie sur]-2 ; + ∞ [par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$

1) $\lim\limits_{x\to-2} (1-x^2) = -3$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} (2+x) = 0^+$ car

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
2+x	-	0	+

Donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty}$. On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation x = -2 est asymptote verticale à la courbe}}$.

2) $ax + b + \frac{c}{2+x} = \frac{(ax+b)(x+2)}{x+2} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b}{x+2} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2}$.

Par identification avec $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$, on obtient $\begin{cases} a = -1 \\ 2a + b = 0 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel x de]-2 ; }+\infty\text{[, } f(x) = -x + 2 - \frac{3}{2+x}.}$

3) a) $f(x) - (-x+2) = -\frac{3}{2+x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{2+x} = 0^-$.

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation y = 2+x est asymptote oblique à la courbe}}$.

b) $f(x) - (-x+2) = -\frac{3}{2+x}$. Sur]-2 ; +∞[, 2+x > 0 et -3 <0 donc f(x) - (-x+2) < 0.

D'où sur]- 2 ; +∞[, la courbe est située en dessous de l'asymptote.

4) a) f est dérivable sur]- 2 ; +∞[et f'(x) = $\dfrac{(-2x)(2+x)-(1-x^2)\times 1}{(2+x)^2} = \dfrac{-4x-2x^2-1+x^2}{(2+x)^2} = \dfrac{-x^2-4x-1}{(2+x)^2} = \dfrac{-(x^2+4x+1)}{(2+x)^2}$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = -\dfrac{x^2+4x+1}{(2+x)^2}}$

<u>b) Etude du signe de la dérivée.</u>

Un carré est toujours positif donc f'(x) est du signe de son numérateur c'est à dire du signe de $-(x^2+4x+1)$

Soit Δ le discriminant de x^2+4x+1 : $\Delta = 4^2-4\times1\times1 = 16-4 = 12$

Δ > 0 donc x^2+4x+1 a deux racines : $\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}$ et $\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} \approx -0{,}27$

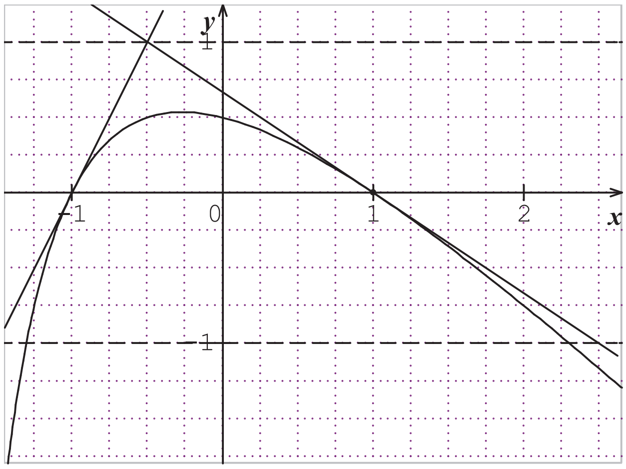
Comme $-2-\sqrt{3} \notin]-2;+\infty[$ sur]- 2 ; +∞[, $f'(x)=0$ a une solution $-2+\sqrt{3}$ et la courbe représentative de f a une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $-2+\sqrt{3}$.

On sait que x^2+4x+1 est du signe de a c'est à dire strictement positif à l'extérieur des racines et du signe de –a, c'est à dire négatif à l'intérieur.

<u>Tableau de variation de f sur]- 2 ; +∞[.</u>

$f(-2+\sqrt{3}) = \dfrac{1-(-2+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1-(4-4\sqrt{3}+3)}{\sqrt{3}} = \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3} \approx 0{,}54$

x	-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de x^2+4x+1		-	0	+	
Signe de -1		-		-	
Signe de $(2+x)^2$		+		+	
Signe de f'		+	0	-	
Variations de f	‖	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	



5°) a) Le coefficient directeur de T_1 est f'(-1) , c'est-à-dire 2. En effet
$f'(-1) = -\dfrac{1-4+1}{1} = 2$

Une équation de la tangente T_1 est y = f'(-1)(x +1) + f(-1)
Or f'(-1) = 2 et f(-1) = 0 d'où une équation de T_1 est : y = 2(x+1) soit y = 2x + 2

b) Le coefficient directeur de T_2 est f'(1) , c'est-à-dire $\dfrac{2}{3}$. En effet $f'(1) = -\dfrac{1+4+1}{9} = \dfrac{2}{3}$

Une équation de la tangente T_2 est y = f'(1)(x -1) + f(1). Or f'(1) = $-\dfrac{2}{3}$ et f(1) = 0 d'où une équation de T_2 est : y = $-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

c) $\begin{cases} y = 2x+2 \\ y = -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+2 \\ 2x+2 = -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+2 \\ 2x+\dfrac{2}{3}x = -2+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+2 \\ \dfrac{8}{3}x = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Les coordonnées du point d'intersection sont $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$

6°)

x	-1,75	-1,5	-1	-0,5	$-2+\sqrt{3} \approx -0{,}27$	0	0,5	1	1,5	2	3	4
f(x)	-8,25	-2,5	0	0,5	0,54	0,5	0,3	0	-0,357	-0,75	-1,6	-2,5

7°) $f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x}-1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x}-\dfrac{2+x}{2+x} = 0$ f(x) = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-x-1}{2+x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x^2+x+1)}{2+x} = 0$

Soit Δ le discriminant de x^2+x+1 : $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = 1-4 = -3$. Δ < 0 donc x^2+x+1 = 0 n'a pas de solution.

Conclusion : l'équation f(x) = 1 n'a pas de solution. La courbe C et la droite d'équation y = 1 n'ont pas de point d'intersection.

8°) $f(x)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x}+1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{2+x}+\dfrac{2+x}{2+x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+x+3}{2+x} = 0$

Soit Δ le discriminant de $-x^2+x+3$: $\Delta = 1^2-4\times3\times(-1) = 1+12 = 13$

Δ > 0 donc $-x^2+x+3$ = 0 a deux solutions $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2{,}3$ et $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}3$

Conclusion :
l'équation f(x) = -1a deux solutions qui sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation y = -1 soit $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.