Exercice n°1 : **1°)** $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Soit θ_1 un argument de z_1 : $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{-1}{2}$.

Donc $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque : la forme trigonométrique de z_1 est $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 1 - i$. $|z_2| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Soit θ_2 un argument de z_2 : $\cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{2}$

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$. $\arg(z_1 z_2) = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z_1 z_2) = -\dfrac{2\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12} + 2k\pi = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

D'où la forme trigonométrique de $z_1 z_2$ est $\boxed{z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)}$

2°) $z_1 z_2 = (\sqrt{3} - i)(1 - i) = \sqrt{3} - i\sqrt{3} - i + i^2 = \sqrt{3} - 1 + i(-\sqrt{3} - 1)$

Donc la forme algébrique de $z_1 z_2$ est $\boxed{z_1 z_2 = \sqrt{3} - 1 + i(-\sqrt{3} - 1)}$

3°) Deux nombres complexes égaux ont même partie réelle et même partie imaginaire donc d'après le 1°) et le 2°)

$2\sqrt{2}\cos\dfrac{-5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1$ et $2\sqrt{2}\sin\dfrac{-5\pi}{12} = -\sqrt{3} - 1$.

D'où $\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

et $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Or on sait que pour tout réel x, cos(-x)= cosx et sin(-x) = -sinx donc $\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Conclusion : $\boxed{\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

Exercice 2 :

<u>Partie A</u>

1°) $P(z) = z^3 + (1 - 8\sqrt{3})z^2 + (64 - 8\sqrt{3})z + 64$.

a) $P(-1) = -1 + (1 - 8\sqrt{3}) - (64 - 8\sqrt{3}) + 64$ =0 donc P(z) est factorisable par x+1 .

b) $P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont à trouver.

Par identification : a = 1 et c = 64

Donc $P(z) = (z+1)(z^2 + bz + 64)$ où b est à trouver.

$P(z) = z^3 + bz^2 + 64z + z^2 + bz + 64 = z^3 + (b+1)z^2 + (64+b)z + 64$

Par identification : b+1 = $1 - 8\sqrt{3}$ et 64 +b = $64 - 8\sqrt{3}$ donc b = $-8\sqrt{3}$

Conclusion : a = 1, c = 64 et b = $-8\sqrt{3}$ et P(z) = $(x+1)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64)$

2°) Soit Δ le discriminant de l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$:

$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$

$\Delta < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{8\sqrt{3} - i\sqrt{64}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 4\sqrt{3} + 4i$.

P(z) = $(x+1)\left(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64\right)$ donc P(z) = 0 $\Leftrightarrow (x+1)\left(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1) = 0$ ou $\left(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64\right) = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{P(z) = 0 a trois solutions -1 , } 4\sqrt{3} - 4i \text{ , } 4\sqrt{3} + 4i}$

3°) On sait que $\left|{z_0}^3\right| = \left|z_0\right|^3 = 2^3 = 8$ et $\arg\left({z_0}^3\right) = 3\arg(z_0) = 3 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

donc La forme trigonométrique de z_0^3 est $8\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{la forme algébrique de } z_0^3 \text{ est } 8i}$.

Partie B

1°) **a**) $\left|z_B\right| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

Soit θ_1 un argument de z_B : $\cos\theta_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\theta_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

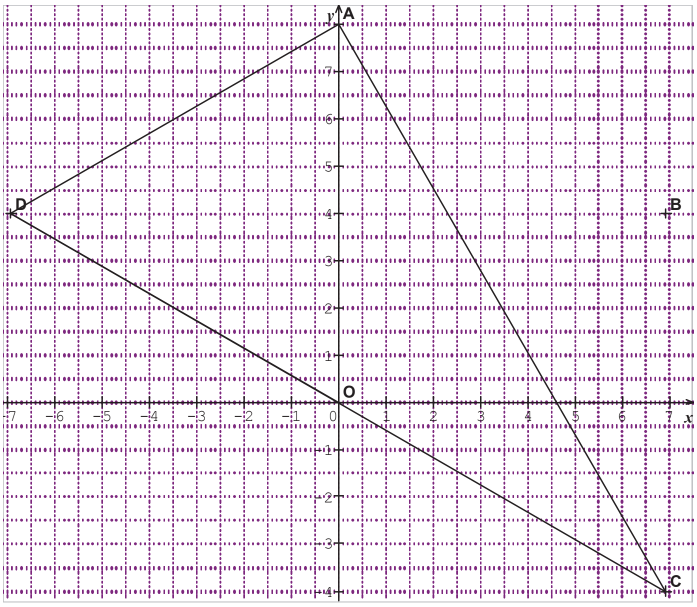
Remarque : la forme trigonométrique de z_B est $8\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$\left|z_C\right|$: deux nombres complexes conjugués ont même module et des arguments opposés

Conclusion : $\boxed{\left|z_B\right| = \left|z_C\right| = 8 \text{ et } \operatorname{Arg}(z_C) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$

Remarque : la forme trigonométrique de z_C est $8\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

b) Les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



2°)

a) $z_D = -4\sqrt{3} + 4i$

b) OA = $\left|z_A\right| = \left|8i\right| = 8$

OD = $\left|z_D\right| = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

AD = $\left|z_D - z_A\right| = \left|-4\sqrt{3} + 4i - 8i\right| = \left|-4\sqrt{3} - 4i\right|$

AD = $\sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

Donc OA = OD = AD = 8.

Conclusion : $\boxed{\text{le triangle OAD est équilatéral}}$.

c) $\dfrac{z_C + z_D}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} - 4i - 4\sqrt{3} + 4i}{2} = 0$ donc O est le milieu de [CD]

d) $\left|z_C\right| = 8$ (cf 1°)a)) donc OC = 8. De plus OA = OD = 8 (cf 2°)b))

donc OA = OD = OC = 8

donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ADC, de plus le coté [CD] est un diamètre du cercle, on peut donc en déduire que $\boxed{\text{le triangle est rectangle en A}}$.

Autre méthode : réciproque du théorème de pythagore.

AD = 8 et AC = $\left|z_C - z_A\right| = \left|4\sqrt{3} - 4i - 8i\right| = \left|4\sqrt{3} - 12i\right| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-12)^2} = \sqrt{48+144} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

Donc $AD^2 + AC^2 = 192 + 64 = 256$

O est le milieu de [CD] donc CD = $2 \times$ OD = 16

Donc $DC^2 = 256$

On constate que $AD^2 + AC^2 = DC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ADC est rectangle en A.