Exercice n°1 : $z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$. $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = -z_1$, $z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = 3\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

1. Forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 :

$z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$;

$z_2 = \overline{z_1}$ donc $\boxed{z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$; $z_3 = -z_1$ donc $\boxed{z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$

$z_5 = 3\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$;

2. Module et argument des nombres complexes z_2 , z_3 et z_4 :

♦ $z_2 = \overline{z_1}$.

$z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$ donc $|z_1| = 3$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Propriété : **deux nombres complexes conjugués ont des modules égaux et des argument opposés**.

donc $|z_2| = |z_1| = 3$ et $\arg(z_2) = -\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Conclusion : $\boxed{|z_2| = 3 \text{ et un argument de } z_2 \text{ est } -\frac{\pi}{6}.}$

Autre méthode :

$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3.$

Soit θ_2 un argument de z_2 : $\cos\theta_2 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2 = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\text{le module de } z_2 \text{ est 3 et un argument de } z_2 \text{ est } -\frac{\pi}{6}.}$

♦$z_3 = -z_1$, $= -1\times z_1$ donc $|z_3| = |-z_1| = |z_1| = 3$ et $\arg(z_3) = \arg(-1) + \arg(z_1) + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

$\arg(z_3) = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Autre méthode :

$z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

$|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3.$

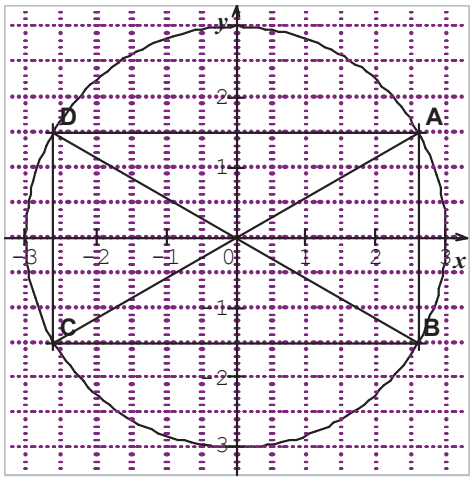
Soit θ_3 un argument de z_3 : $\cos\theta_3 = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_3 = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\text{le module de } z_3 \text{ est 3 et un argument de } z_3 \text{ est } -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6}.}$

♦ $z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On remarque que $z_4 = 1\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Conclusion : $\boxed{\text{le module de } z_4 \text{ est 1 et un argument de } z_4 \text{ est } \frac{2\pi}{3}.}$

3.Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_5.



a) OA= $|z_1| = 3$. OB = $|z_2| = 3$. OC = $|z_3| = 3$. OD = $|z_5| = 3$
Donc A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 3.

b) On trace le cercle de centre O et de rayon 3 unités soit 6 cm.

Sur le cercle on place les points A $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ B $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}\right)$; C $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}\right)$

et D $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$. voir figure ci contre .

c) AC = $|z_3 - z_1|$, $z_3 - z_1 = -z_1 - z_1 = -2z_1$ donc

$$z_3 - z_1 = -2z_1 = -2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$$

$$|z_3 - z_1| = |-2z_1| = |-2||z_1| = 2\times 3 = 6 .$$

Conclusion : AC = 6.

BD = $|z_5 - z_2|$, $z_5 - z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right) = -2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+3i = -3\sqrt{3}+3i$,

donc $|z_5 - z_2| = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$.

Conclusion : BD = AC = 6.

d) L'affixe du milieu de [BD] est $\frac{z_2+z_5}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Donc O est le milieu de [BD].

De même L'affixe du milieu de [AC] est $\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Donc O est le milieu de [AB].

Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.
De plus AC = BD donc les diagonales du parallélogramme ABCD ont même longueur.
Conclusion : ABCD est un rectangle.

Exercice n°2 : Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1°) P(-1) = -2 -1 + 5 – 2 = 0.
Donc P(x) est factorisable par x +1 et P(x) = (x +1) ($2x^2$ + bx - 2) où b est un réel à déterminer.

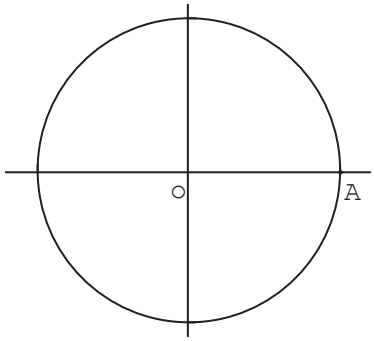
On développe pour trouver b :
(x+1) ($2x^2$ + bx - 2) = $2x^3$ + bx^2 - 2x + $2x^2$ + bx –2 = $2x^3$ + (b + 2)x^2 + (-2 + b)x –2

Par identification des polynômes on obtient :
b + 2 = -1 et -2 + b = -5, d'où b = -3.
Finalement **P(x) = (x+1) ($2x^2$ - 3x - 2)**

2°) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x - 2 = 0$
Soit Δ le discriminant de $2x^2$ - 3x - 2 : $\Delta = 9 + 16 = 25$
Δ>0 donc $2x^2$ - 3x - 2 a deux racines : x'= $\frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ ou x"= $\frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Conclusion : P(x) = 0 a trois solutions -1, 2, $-\frac{1}{2}$

3°)
$2\sin^3 x - \sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$
On pose X = sin x
On obtient $2X^3 - X^2 - 5X - 2 = 0$
On retrouve l'équation du 2°) donc X = -1 ou X = 2 ou X = -0,5.
On en déduit que sinx = -1 ou sin x = 2 ou sin x = $\frac{-1}{2}$



sin x =-1 a pour solution tout nombre de la forme $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ où k est un entier relatif.

sin x = 2 n'a pas de solution car un sinus est toujours compris entre –1 et 1.

$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x = \pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement $S = \left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in Z\right\}$

Les solutions sont représentés par les points A, E et F sur le cercle ci-dessus