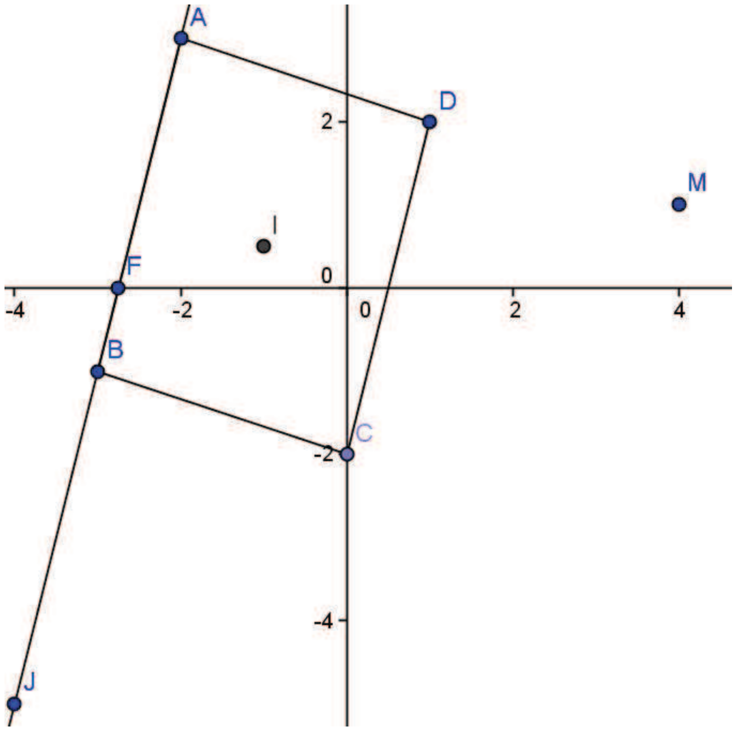
Exercice n°1 : A(-2 ; 3), B(-3 ; -1), C(0 ; -2) et I milieu de [AC].



1. $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x_C - x_B\ ; y_C - y_B)$ soit (3 ; -1).

2. Les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\ ; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$ soit (-1 ; 0,5).

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{DC}\ (-x_D\ ; -2 - y_D)$ et $\overrightarrow{AB}$ (-1 ; -4).

Donc $\begin{cases} -x_D = -1 \\ -2 - y_D = -4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 2 \end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{\text{D (1 , 2)}}$

4. a) $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Soit $(x_M\ ; y_M)$ les coordonnées du point M.

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M + 3 \\ y_M + 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x_M + 3 = 7 \\ y_M + 1 = 2 \end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{\text{M (4 , 1)}}$

5. J est symétrique de A par rapport à B donc B est le milieu de [AJ]

1ère méthode :

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB}$.

Soit $(x_J\ ; y_J)$ les coordonnées du point L.

On a : $\begin{cases} x_J + 3 = -1 \\ y_J + 1 = -4 \end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{\text{J (-4 ; -5).}}$

2ième méthode :

$x_B = \dfrac{x_A + x_J}{2}$ et $y_B = \dfrac{y_A + y_J}{2}$

Donc $2x_B = x_A + x_J$ et $2y_B = y_A + y_J$

Donc $2x_B - x_A = x_J$ et $2y_B - y_A = y_J$

Donc $x_J = -6 + 2 = -4$ et $y_J = -5$.

Conclusion : $\boxed{\text{J (-4 ; -5).}}$

6. A, B et F sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.
F appartient à l'axe des abscisses donc son ordonnée est égale à 0.

$\overrightarrow{AB}$ (-1 ; -4). et $\overrightarrow{AF}(x_F + 2\ ; -3)$

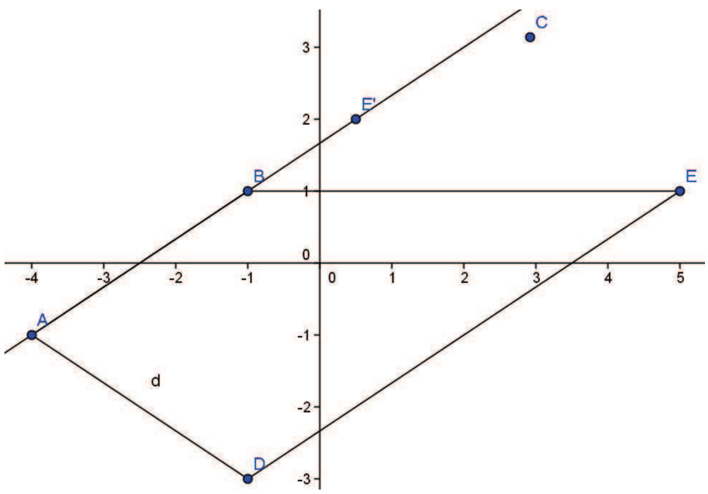
D'où $-1 \times (-3) - (-4) \times (x_F + 2) = 0$

Donc $3 + 4x_F + 8 = 0$

Donc $4x_F = -11$

Donc $x_F = \dfrac{-11}{4}$. Conclusion ; $\boxed{F\left(\dfrac{-11}{4}\ ; 0\right)}$

Exercice n°2 : Dans un repère (O,I,J) on donne les points
A(-4 ; -1) ;B(-1 ; 1), C(3 ; 3), D(-1 ; -3) et E (5 ; 1).



1. $\overrightarrow{AB}\ (3\ ; 2)$ et $\overrightarrow{DE}\ (6\ ; 4)$. $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens

2. Le quadrilatère ABED est un trapèze.

3. $\overrightarrow{AC}(7{,}4)$ donc $3 \times 4 - 2 \times 7 = -2$; -2 $\neq 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés .

4. Soit E'(a ; 2). A, B et E' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AE'}$ et

$\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AE'}(a+4\,;3)$ donc $\overrightarrow{AE'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $(a+4)\times 2-3\times 3=0$.

C'est à dire si et seulement si 2a -1 = 0. D'où $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

Exercice n°3 :

1. A,(0 , 0) B (1 ; 0) et C(0 ; 1).

2. E $\left(0\,;\frac{1}{3}\right)$, F (3 ; 0) et G $\left(3\,;\frac{1}{3}\right)$.

3. $\overrightarrow{BE}\left(-1\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{FC}(-3\,;1)$ $3\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FC}$ donc les vecteurs sont colinéaires.

Conclusion : $\boxed{\text{les droites (BE) et (FC) sont parallèles}}$.

4. $\overrightarrow{AF}(3\,;0)$ $\overrightarrow{EG}(3\,;0)$**.** $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EG}$ **donc** $\boxed{\text{AFGE est un parallélogramme}}$.

Exercice n°4 :

a. A(10 ; -5) ; B(5 ; 4) et I (7 ; 6) ;
$\overrightarrow{AI}(-3\,;11)$ et $\overrightarrow{IB}(-2\,;-2)$:
On a a = -3 et c = -2 : a $\neq$ c donc l'algorithme affiche perdu ;

b. A(-30 ; 1) ; B(10 ; 3) et I (-10 ; -2) ; $\overrightarrow{AI}(20\,;-3)$ et $\overrightarrow{IB}(20\,;5)$:
On a a = 20 et c = 20, b = -2 et d = 5 : b $\neq$ d donc l'algorithme affiche perdu ;

c. A(-3 ; -4) ; B(1 ; 4) et I (-1 ; 0) ; $\overrightarrow{AI}(2\,;4)$ et $\overrightarrow{IB}(2\,;4)$:
On a a = 2 et c = 2, b = 4 et d = 4 : a=c et b = d donc l'algorithme affiche gagné ;

d. Cet algorithme détermine si I est le milieu de [AB].
I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
C'est-à-dire si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ et de $\overrightarrow{IB}$ sont égales.

Exercice 5 :

1°) $\vec{m}\begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ x-5 \end{pmatrix}$.

$\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si et seulement si (x+1)(x-5)+9 = 0

(x+1)(x-5)+9 = 0 $\Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$.

On a alors $\vec{m}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{m}=-\vec{n}$ donc k = -1.

2°) $\vec{m}\begin{pmatrix} x-1 \\ x+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si et seulement si $3(x-1)-2\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

$$3x-3-2x-\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow 3x-3-2x-\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow x-\frac{9}{3}-\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow x=\frac{13}{3}.$$

On a alors $\vec{m}\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{m}=\frac{5}{3}\vec{n}$.