Exercice n°1 :

a) $\frac{25x^2-4x}{5x-2}=\frac{4-4x}{5x-2} \Leftrightarrow \frac{25x^2-4x}{5x-2}-\frac{4-4x}{5x-2}=0 \Leftrightarrow \frac{25x^2-4x-4+4x}{5x-2}=0 \Leftrightarrow \frac{25x^2-4}{5x-2}=0 \Leftrightarrow (25x^2-4=0 \text{ et } 5x-2\neq 0)$

$\Leftrightarrow ((5x-2)(5x+2)=0 \text{ et } 5x\neq 2) \Leftrightarrow (5x-2=0 \text{ ou } 5x+2=0 \text{ et } x\neq\frac{2}{5})$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \text{ ou } -\frac{2}{5} \text{ et } x\neq\frac{2}{5}$

L'équation $\frac{25x^2-4x}{5x-2}=\frac{4-4x}{5x-2}$ a une solutions $-\frac{2}{5}$

b) $\frac{1-2x}{x-1}=\frac{-2x+3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x-1}-\frac{-2x+3}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{(1-2x)(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\frac{(-2x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x+2-2x^2-4x-\left(-2x^2+2x+3x-3\right)}{(x-1)(x+2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-3x+2+2x^2-5x+3}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \frac{-8x+5}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow (-8x+5=0 \text{ et } x\neq 1 \text{ et } x\neq -2)$

$\Leftrightarrow (x=\frac{5}{8} \text{ et } x\neq 1 \text{ et } x\neq -2)$

L'équation $\frac{1-2x}{x-1}=\frac{-2x+3}{x+2}$ a une solution $\frac{5}{8}$

Exercice n°2 : a) $(3x-1)(2+x)>0$.

Première méthode : $(3x-1)(2+x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \text{ et } 2+x>0 \\ \text{ou} \\ 3x-1<0 \text{ et } 2+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>1 \text{ et } x>-2 \\ \text{ou} \\ 3x<1 \text{ et } x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \text{ et } x>-2 \\ \text{ou} \\ x<\frac{1}{3} \text{ et } x<-2 \end{cases}$

$(3x-1)(2+x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Deuxième méthode : on peut résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

$3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Valeurs de x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de 3x-1		-		-	0	+	
Signe de 2+x		-	0	+		+	
Signe du produit		+	0	-	0	+	

Conclusion : l'inéquation $(3x-1)(2+x)>0$ a pour ensemble de solutions $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

b) $\left(x^2+2\right)(3x-5)(1-x)>0$:

On sait que pour tout réel x, $x^2\geq 0$ donc $x^2+2\geq 2>0$

$3x-5=0 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$;

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Valeurs de x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de x²+2		+		+		+	
Signe de 3x-5		-		-	0	+	
Signe de 1-x		+	0	-		-	
Signe du produit		-	0	+	0	-	

Conclusion : l'inéquation $\left(x^2+2\right)(3x-5)(1-x)>0$ a pour ensemble de solutions $S=\left]1;\frac{5}{3}\right[$

c) $(2x-3)^2<0$;

Un carré est positif ou nul donc pour tout réel x $(2x-3)^2\geq 0$. Conclusion : cette inéquation n'a pas de solution.

d)

$(2x-1)(4x-3)\leq(2x-1)(x-3)$

$\Leftrightarrow (2x-1)(4x-3)-(2x-1)(x-3)\leq 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)[(4x-3)-(x-3)]\leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x)\leq 0$

Valeurs de x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de 2x-1		-		-	0	+	
Signe de 3x		-	0	+		+	
Signe du produit		+	0	-	0	+	

Conclusion : l'inéquation $(2x-1)(4x-3)\leq(2x-1)(x-3)$ a pour ensemble de solutions $S=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Exercice n°3 : a) $\dfrac{(x-1)(3x+2)}{(2-x)} \geq 0$

On peut résoudre l'inéquation à l'aide d'un tableau de signes .

$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$. 2 est valeur interdite.

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
Signe de x-1		-		-	0	+		+	
Signe de 3x+2		-	0	+		+		+	
Signe de 2-x		+		+		+	0	-	
Signe du quotient		+	0	-	0	+		-	

S = $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right] \cup [1\,;2[$

b) $\dfrac{2x-3}{x+1} \geq \dfrac{2x}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \geq \dfrac{2x(x+1)}{(x-2)(x+1)} \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \dfrac{2x(x+1)}{(x-2)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-7x+6}{(x+1)(x-2)} - \dfrac{2x^2+2x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

$\dfrac{2x-3}{x+1} \geq \dfrac{2x}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{-9x+6}{(x+1)(x-2)} \geq 0$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. -1 est valeur interdite.

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. 2 est valeur interdite.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
Signe de x -2		-		-		-	0	+	
Signe de x+1		-	0	+		+		+	
Signe de -9x+6		+		+	0	-		-	
Signe du quotient		+		-	0	+		-	

S = $]-\infty\,;-1[\cup \left[\dfrac{2}{3};2\right[$

Exercice n°4 : la fonction *f* est définie sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2}$. (1)

1°) $1+\dfrac{2x-5}{x^2+2} = \dfrac{x^2+2}{x^2+2} + \dfrac{2x-5}{x^2+2} = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2} = f(x)$. (2)

2°) $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2+2} = \dfrac{x^2+3x-x-3}{x^2+2} = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2} = f(x)$. (3)

3°) a) $f(0)=\dfrac{0^2+2\times 0-3}{0+2} = -\dfrac{3}{2}$

b) f(x) = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $x+3=0$ et $x^2+2 \neq 0$

f(x) = 0 $\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$ et $x^2 \neq -2$. L'équation f(x)= 0 a deux solutions 1 et -3.

c) f(x) = 1 $\Leftrightarrow 1+\dfrac{2x-5}{x^2+2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow 2x-5=0$ et $x^2+2 \neq 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ et $x^2+2 \neq 0$. L'équation f(x) = 1 a une solution $\dfrac{5}{2}$

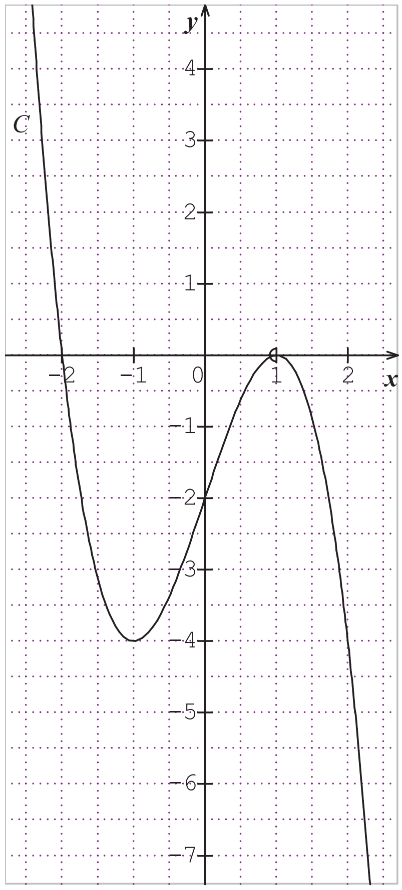
d) f(x) $\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2+2} \geq 0$

Un carré est positif ou nul donc $x^2+2 \geq 2 > 0$

Valeurs de x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de x-1		-		-	0	+	
Signe de x+3		-	0	+		+	
Signe de x²+2		+		+		+	
Signe du quotient		+	0	-	0	+	

S = $]-\infty\,;-3] \cup [1;+\infty[$

Exercice n°5 :



Partie A :
1. L'image de 2 par f est -4.
2. Tableau de variation de f

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
f	↘ -4 ↗ 0 ↘

3. a) f(x) = 0 a deux solutions -2 et 1
b) f(x) = -4 a deux solutions -1 et 2.
On a cherché les abscisses des points de la courbe situés sur la droite d'équation y = -4.
4. a) f(x) > 0 sur $]-\infty\,;-2[$
b) f(x) $\leq$ -4 sur $\{-1\}\cup[2\,;+\infty[$
On a cherché les abscisses des points de la courbe situés sur ou en dessous de la droite d'équation y = -4.

5. Tableau de **signes** de la fonction f .

Valeurs de x	$-\infty$ -2 1 $+\infty$
Signe de f(x)	+ 0 - 0 -

6. la fonction g est définie sur ℝ par g(x) = -x -2
a. D passe par A (0 ; -2) ; B(-2 ; 0) ; C (-4 , 2) .
b f(x) = g(x) a trois solutions 0, 2 et -2
c. f(x) < g(x) sur $]-2\,;0[\cup]2\,;+\infty[$
On cherche les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite D

Partie B : On admet que $f(x)=-x^3+3x-2$. On rappelle que g(x) = -x-2.
1. $f(x) - g(x) \;=-x^3+3x-2-(-x-2)=-x^3+4x=x(-x^2+4)=x(4-x^2)=x(2-x)(2+x)$

2. f(x) – g(x) = 0 $\Leftrightarrow x(2-x)(2+x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $(2-x)=0$ ou $(2+x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ ou $x=-2$
f(x) = g(x) a trois solutions -2, 0 et 2.
Le résultat obtenu es bien cohérent avec celui obtenu dans le 6°) b.

3. Etudier le signe de f(x) – g(x).

Valeurs de x	$-\infty$ -2 0 2 $+\infty$
Signe de x	- - 0 + +
Signe de x+2	- 0 + + +
Signe de 2-x	+ + + 0 -
Signe du produit	+ 0 - 0 + 0 -

D'après le tableau f(x) –g(x) < 0 sur $]-2\,;0[\cup]2\,;+\infty[$
f(x) –g(x) > 0 sur $]-\infty\,;-2[\cup]0\,;2[$.
On en déduit que f(x) < g(x) sur $]-2\,;0[\cup]2\,;+\infty[$: on retrouve bien le résultat du 6c.

Exercice n°6 : Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = x^2 - 4x + 3.
1°) Il semble que la calculatrice admet un minimum égal à -1 atteint pour x = 2
f(2) = 4 – 8 - 3 = -1.
Pour tout réel x, f(x) –(-1) = x^2 - 4x + 3 +1 = x^2 - 4x + 4= (x-2)²
Un carré est toujours positif donc pour tout réel x, f(x) – (-1) $\geq$ 0 d'où f(x) $\geq$ (-1)
Conclusion : la conjecture est démontrée.
2°) a) f(x) $\geq$ 3 a pour ensemble de solution $]-\infty\,;0]\cup[4\,;+\infty[$
b) f(x) ≤ -2 n'a pas de solution.

Exercice n°7 :
1. L'image de 3 par f est 4.
2. L'antécédent de -3 par 6.
3. Le minimum de f sur I est -3 et le maximum de f sur I est 4.
4. f est strictement décroissante sur [-7 ; -3] donc comme -5 < -4, f(-5) > f(-4) .
On ne peut pas comparer f(-4) et f(-2) car f n'est pas monotone sur [-4 ; 2] ;
f est strictement croissante sur [-3 ; 3] donc comme -1< 1, f(-1) < f(1).
5. • Si $-3\leq x\leq 6$ alors $-3\leq f(x)\leq 4$
• 0< f(-3,5) < 3
6. a et b sont deux nombres tels que $3\leq a<b\leq 6$: f est strictement décroissante sur [3 ; 6] donc f(a) >f(b).
7. a et b sont deux nombres tels que $-3\leq a<b\leq 3$. f est strictement croissante sur [-3 ; 3] donc f(a) < f(b).