

Exercice n°1 (2,5 points): $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan

$$1^\circ) \|\vec{u}\| = \sqrt{2} ; \|\vec{v}\| = \sqrt{3} \text{ et } (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$2^\circ) \|\vec{u}\| = 3 ; \|\vec{v}\| = 4 \text{ et } \|\vec{u} + \vec{v}\| = 6. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2). \text{ Soit } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(6^2 - 3^2 - 4^2) = \frac{11}{2}$$

$$3^\circ) \|\vec{u}\| = 3 ; \|\vec{v}\| = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -3. \quad \|3\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 = (3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 9\vec{u}^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\vec{v}^2 = 81 + 36 + 16 = 133. \text{ Donc } \|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{133}$$

Exercice n°2 (4 points): ABC est un triangle isocèle en A tel que : AB = 3cm et BC = 4 cm .
O est le milieu du segment [BC]

1. a) 1^{ère} méthode :

Le triangle est isocèle donc la médiane issue de A est aussi la hauteur issue de A .
Donc le projeté orthogonal de A sur (BC) est le milieu O du segment [BC].

$$\text{D'où } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BO} \cdot \vec{BC}$$

les vecteurs $\vec{BO}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires et de même sens donc

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BO} \cdot \vec{BC} = BO \times BC = 2 \times 4 = 8.$$

2^{ième} méthode :

Le triangle est isocèle de sommet A donc AC = AB = 3.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 4^2 - 3^2) = 8$$

b) La droite (AO) est une hauteur de ABC donc (AO) $\perp$ (BC) et $\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0$.

c) 1^{ère} méthode :

$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = \vec{OC} \cdot \vec{CB}$. les vecteurs $\vec{OC}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -OC \times CB = -8$.

$$2^\circ) \text{ méthode : } \vec{AC} \cdot \vec{CB} = -\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -\frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2) = -\frac{1}{2}(3^2 + 4^2 - 3^2) = -8$$

2. D'après la question 1a) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 8$

Or on a aussi $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BI}$ donc $\vec{BA} \cdot \vec{BI} = 8$

Les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BI}$ sont colinéaires et de même sens. D'où $BA \times BI = 8$ et $BI = \frac{8}{BA} = \frac{8}{3}$.

Conclusion : $BI = \frac{8}{3} \text{ cm} \approx 2,7 \text{ cm}$

Exercice n°3 (4 points) :

$$1^\circ) \vec{AJ} \cdot \vec{CI} = (\vec{AB} + \vec{BJ}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BI}) = \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AB} \cdot \vec{BI} + \vec{BJ} \cdot \vec{CB} + \vec{BJ} \cdot \vec{BI}.$$

$$\vec{AJ} \cdot \vec{CI} = 0 - AB \times BI - BJ \times CB + 0 = -a \times \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \times a = -a^2.$$

2°) • Calcul de AJ :

le triangle ABJ est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + BJ^2 = AJ^2$

$$\text{Or } AB = a \text{ et } BJ = \frac{a}{2} \text{ donc } AJ^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}. \text{ Conclusion : } \boxed{AJ = \frac{\sqrt{5}a}{2}}$$

$$\bullet \text{ Calcul de CI : même raisonnement } \boxed{CI = \frac{\sqrt{5}a}{2}}$$

$$3^\circ) \vec{AJ} \cdot \vec{CI} = AJ \times CI \times \cos(\vec{AJ}, \vec{CI})$$

Or $\vec{AJ}$ et $\vec{KJ}$ sont colinéaires et de même sens, $\vec{CI}$ et $\vec{KI}$ sont colinéaires et de même sens donc $(\vec{AJ}, \vec{CI}) = (\vec{KJ}, \vec{KI})$.

De plus $\cos(\vec{KJ}, \vec{KI}) = \cos \angle KJ$

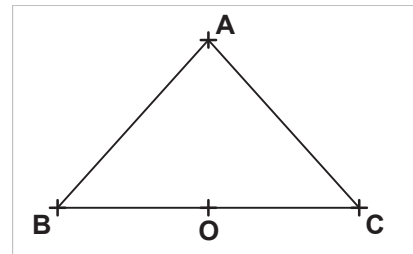
$$\text{Donc } \vec{AJ} \cdot \vec{CI} = AJ \times CI \times \cos \angle KJ$$

$$\cos \angle KJ = \frac{\vec{AJ} \cdot \vec{CI}}{AJ \times CI} = \frac{-a^2}{\frac{\sqrt{5}a}{2} \times \frac{\sqrt{5}a}{2}} = -\frac{4}{5}$$

Conclusion : $\angle KJ \approx 143,1^\circ$.

Exercice n°4 (3,5 points) : dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A (2 ; 1) ; B (7 ; 2) et C(3 ; 4)

1°) a) Propriété :



L'ensemble des points $M(x ; y)$ tel que $ax + by + c = 0$, avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc une équation de (AB) est $2x+3y+c = 0$

$A \in (AB)$ donc $2 \times 2 + 3 \times 1 + c = 0$ donc $c = -7$.

Conclusion : une équation de (AB) est $2x + 3y - 7 = 0$

2°) La médiatrice (d) du segment [AB] est la droite perpendiculaire à [AB] passant par le milieu I de [AB].

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$

1^{ère} méthode :

propriété :

Soit $\vec{n}(a ; b)$ un vecteur non nul dans un repère orthonormé.

Une droite admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d) donc une équation de (d) est $-3x + 2y + c = 0$

$I\left(\frac{1}{2} ; 2\right) \in (d)$ donc $-1,5 + 4 + c = 0$ donc $c = -2,5$. Conclusion : une équation de d est donc $-3x + 2y - 2,5 = 0$

2^{ième} méthode : $M(x, y) \in d$ si et seulement si $\vec{AB} \cdot \vec{IM} = 0$

C'est à dire si et seulement si $-3(x-0,5)+2(y-2) = 0$.

Une équation de d est donc $-3x + 2y - 2,5 = 0$

Exercice n°5 (2,5 points) : (u_n) est une suite arithmétique. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1°) Propriété 1 : **Si u_n est une suite arithmétique alors $u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison})$.**

soit r la raison de la suite,

d'après la propriété 1 : $u_{100} = u_{50} + (100 - 50) \times r$.

D'où $806 = 406 + 50 \times r$ et donc $r = \frac{806 - 406}{50} = 8$.

De même $u_{50} = u_0 + 50 \times r$. D'où $406 = u_0 + 50 \times (8)$ et donc $u_0 = 406 - 400 = 6$

2°) Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Propriété 2 :

Si (u_n) est une suite arithmétique alors la somme de ses premiers termes est $\left(\text{nombre de termes}\right) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

D'après la propriété 2 : $S = 51 \times \frac{u_{50} + u_{100}}{2} = 51 \times \frac{406 + 806}{2} = 30\,906 \text{ €}$

Exercice 6 (4 points).

1°) Augmenter un nombre de t% revient à multiplier ce nombre par $1+t\%$

donc $u_2 = \left(1 + \frac{2}{100}\right) u_1 = 1,02 \times u_1 = 1,02 \times 500 = 510 \text{ €}$

donc $u_3 = 1,02 \times u_2 = 1,02 \times 510 = 520,20 \text{ €}$

2°) a) De même, pour tout entier n, $u_{n+1} = 1,02 \times u_n$

b) on déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme u_1 .

c) la raison est supérieure à 1 et le premier terme u_1 est positif donc la suite est croissante.

3°) On en déduit que pour tout entier n, $u_n = u_1 \times (1,02)^{n-1}$.

Donc $u_{20} = u_1 \times (1,02)^{19} = 500 \times (1,02)^{19} \approx 728,41$. La 20^{ième} année, il touchera une prime de 728,41 €.

4°). S est la somme totale des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20}$)

On sait que

Si (u_n) est une suite géométrique dont la raison est différente de 1, alors la somme de ses premiers termes est :

$$\frac{\text{premier terme} \times (1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}})}{1 - \text{raison}}$$

Donc $S = \frac{u_1(1 - 1,02^{20})}{1 - 1,02} = \frac{500 \times (1 - 1,02^{20})}{1 - 1,02} \approx 12148,68$.

La somme totale des primes touchées sur les 20 années est de 12 148,68 €.