

Exercice 1 : $u_n = \frac{n+3}{n+4}$

$$u_{n+1} = \frac{n+1+3}{n+1+4} = \frac{n+4}{n+5}$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{n+4}{n+5} - \frac{n+3}{n+4} = \frac{(n+4)^2}{(n+4)(n+5)} - \frac{(n+3)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \frac{(n^2 + 8n + 16) - (n^2 + 8n + 15)}{(n+4)(n+5)} = \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

n étant un entier $n+4$ et $n+5$ sont strictement positifs donc pour tout entier n $u_{n+1} - u_n > 0$

Conclusion : la suite est strictement croissante.

Exercice n°2 : pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n+1}$ et $u_n = \frac{5^n}{n}$.

Pour tout entier n non nul : $5^n > 0$ et $n > 0$ donc $u_n > 0$

$$\text{Pour tout entier } n \text{ non nul : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{n+1}}{\frac{5^n}{n}} = \frac{5^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{5^n} = \frac{5n}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{5n}{n+1} - 1 = \frac{4n-1}{n+1}$$

On sait que $n \geq 1$ donc $4n \geq 4$ donc $4n - 1 \geq 3 > 0$.

On en déduit que pour tout entier n non nul $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$, c'est-à-dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et comme u_n est positif alors $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion : la suite est strictement croissante.

Exercice n°3 : (u_n) est la suite définie par u_0 et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

1. $u_0 = 0,5$.

Une valeur approchée à 10^{-6} près de u_5 est 1,996754.

La suite semble croissante, majorée par 2 et minorée par 0,5.

2. $u_0 = 5$.

Une valeur approchée à 10^{-6} près de u_5 est 2,003035.

La suite semble décroissante, majorée par 5 et minorée par 2.

3. Lorsqu'on choisit $u_0 = 2$, la suite est stationnaire.

Exercice 4 : soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$ et $u_0 = -\frac{3}{2}$.

On admet que u_n est défini pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$1.a) u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 4} = \frac{3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 2}{-\frac{3}{2} + 4} = \frac{-\frac{9}{2} + \frac{4}{2}}{-\frac{3}{2} + \frac{8}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1;$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 2}{u_1 + 4} = \frac{3 \times (-1) + 2}{-1 + 4} = \frac{-3 + 2}{3} = \frac{-1}{3}; u_3 = \frac{3}{11}$$

$$u_1 - u_0 = -1 + 1,5 = 0,5;$$

$$u_2 - u_1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

b) Une valeur approchée à 10^{-6} près de $u_5 \approx 0,853881$

$$2. f(x) = \frac{3x+2}{x+4} \text{ sur } [-1,5; 1,5]$$

$$a) f \text{ est dérivable sur } [-1,5; 1,5] \text{ sur } f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2}$$

b) Un carré est positif ou nul.

sur $[-1,5; 1,5]$, $(x+4)^2 > 0$. De plus 10 est strictement positif donc f' est strictement positif sur $[-1,5; 1,5]$.

f est donc croissante sur $[-1,5; 1,5]$.

x	-1,5	1,5
f'(x)	+	
f(x)	-1	$\frac{13}{11}$

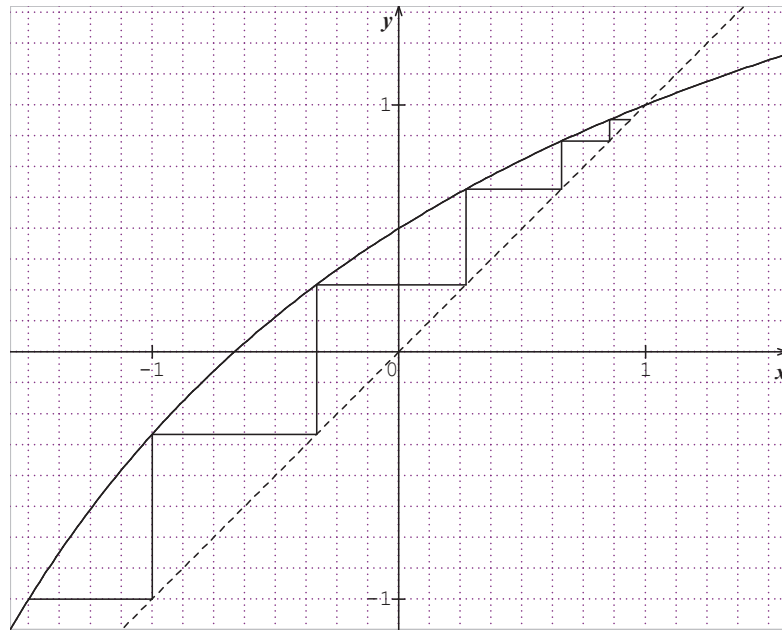
3. a.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
f(x)	-1	-0,333	0,14	0,5	0,78	1	1,18

b. Courbe représentative de f sur $[-1,5 ; 1,5]$ et de la droite d'équation $y = x$.

c. voir figure .

d. La suite semble strictement croissante, majorée par 1, minorée par -1,5.



5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$;

on admet que v_n est défini pour tout n.

$$a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} = \frac{\frac{3u_n + 2 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4}} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 2)} = \frac{2}{5} v_n$$

Conclusion : (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{-2,5}{0,5} = -5$

$$b) v_n = -5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

$$c) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{3}{u_n + 2} .$$

Conclusion : $1 - v_n \neq 0$.

$$d) v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \text{ donc } v_n(u_n + 2) = u_n - 1 .$$

$$u_n v_n + 2v_n = u_n - 1 . \text{ D'où } u_n v_n - u_n = -1 - 2v_n .$$

$$u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n ; u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}$$

$$\text{Conclusion : } u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} .$$

$$e) u_n = \frac{1 - 10 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} .$$

f) Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-6} près, de u_5 . vérifier que vous retrouvez bien le résultat obtenu dans le 1.b)

Exercice n°5 : (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$1. u_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{2}\right) = 1, u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, u_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1 \text{ et } u_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$2. u_{n+4} = \cos\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) ;$$

$$\text{Or la fonction cosinus est périodique de période } 2\pi \text{ donc } u_{n+4} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = u_n .$$

3. La suite est périodique , de période 4.