Exercice n°1 : ABC est un triangle non aplati et le point G =bar {(A, 1 + k) , (B, 3k – 2) , (C, 4 – k)}, avec $k \in \mathbb{R}$.

1°) Le point G existe et est unique si et seulement si 1+k +3k – 2 + 4 – k $\neq$0. C'est à dire si et seulement si 3k+3 $\neq$0.
Conclusion : le point G existe si et seulement si k$\neq$-1

2°) G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\begin{cases} 1+k = 3k-2 \\ 1+k = 4-k \\ k \neq -1 \end{cases}$. Soit si et seulement si $\begin{cases} 3 = 2k \\ 2k = 3 \\ k \neq -1 \end{cases}$.

Conclusion : G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $k = \dfrac{3}{2}$

Exercice n°2 : A (-1 ; 2) et B (2 ; -3). G = bar $\{(A\,;3),(B\,;-1)\}$.

$x_G = \dfrac{3\times(-1)-1\times 2}{2} = \dfrac{-5}{2}$ et $y_G = \dfrac{3\times 2-1\times(-3)}{2} = \dfrac{9}{2}$. Conclusion : les coordonnées de G sont $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

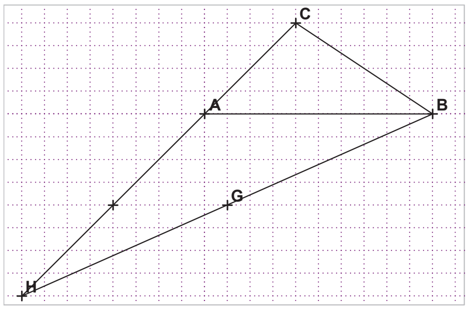
Exercice n°3 :

1. Le barycentre de (A, 2) et (B, 3) est le point G tel que c) $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$
2. G est le barycentre de (A, 1) et (B, 3) alors A est le barycentre de b) (B,3) et (G,-4)

3. Sur la figure ci-dessous , A B D C , B est le barycentre de c) (A,2) et (C,1)

4. Le barycentre de (A, -2), (B,3) et (C, -1) est aussi barycentre de c) $\left(A,\dfrac{1}{3}\right),\left(B,-\dfrac{1}{2}\right),\left(C,\dfrac{1}{6}\right)$

Exercice n°4 : soit le triangle ABC tracé ci-contre.



1. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{CA} = \dfrac{-2}{-2+3}\overrightarrow{AC}$ donc H = bar{(A, 3) , (C ,– 2)}.
2. G est le milieu de [HB] donc G = bar{(H, 1) , (B, 1) } .

3. par associativité G = bar{(A, 3) , (B, 1) , (C, – 2)}.

Exercice 5 : ABC est un triangle.
$\overrightarrow{AI} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
1. I = bar $\{(A,-1);(B,4)\}$ donc par homogénéité I = bar $\{(A,3);(B,-12)\}$
J = bar $\{(C,-1);(B,6)\}$ donc par homogénéité J = bar $\{(C,2);(B,-12)\}$
K = bar $\{(C,2);(A,3)\}$

2. Soit G le barycentre du système bar $\{(A,3);(C,2);(B,-12)\}$.
Par associativité G = bar $\{(I,-9);(C,2)\}$ donc $G \in (IC)$
Par associativité G = bar $\{(J,-10);(A,3)\}$ donc $G \in (AJ)$
Par associativité G = bar $\{(K,5);(B,-12)\}$ donc $G \in (BK)$

Conclusion : les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes en un point G.

3. G= $\{(A,3);(C,2);(B,-12)\}$ donc $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} - 12\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{GA} - 12\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{GA} - 12\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = -\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \dfrac{12}{7}\overrightarrow{AB}$

Exercice n°6 : Soit le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc I = bar $\{(A,3);(B,1)\}$

Soit J milieu de [DC] donc J = bar $\{(D,1);(C,1)\}$ donc J barycentre de {(D,2),(C,2)}
G barycentre de {(I,4),(J,4)}
donc G barycentre de {(A,3),(B,1),(C,2),(D,2)}

Exercice n°7 :

1°) K est le barycentre du système $\{(A,1);(B,3)(C,-1)\}$

Soit J = bar $\{(A,1);(B,3)\}$ donc $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Par associativité K = bar $\{(J,4);(C,-1)\}$ donc $\overrightarrow{JK}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{JC}$

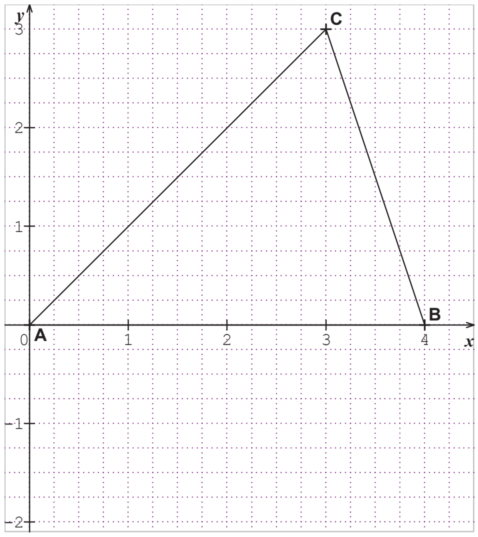
I est le milieu de [AB]

G est le centre de gravité du triangle ABC donc G est le point d'intersection des médianes issues de C et de A.

2°) K = bar{(A,1), (B,3), (C,-1)} donc pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MK}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MK}\right\|$. Or $\left\|3\overrightarrow{MK}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MK}\right\|=3MK$. Donc $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3MK$

On en déduit que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3 \Leftrightarrow 3MK=3 \Leftrightarrow$ MK =1.



Conclusion : l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=1$ est le cercle de centre K et de rayon 1.

3°) Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MK}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MK}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

Conclusion :

l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ est la droite parallèle à (AC) passant par K.

4°) G est le centre de gravité du triangle ABC donc G = bar{(A,1), (B,1), (C,1)}.

On en déduit que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ .Et donc que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3MG$.

De plus $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3MK$ (voir 1°))

D'où $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow 3MK=3MG \Leftrightarrow MK=MG$

Conclusion : l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ est la médiatrice de [KG].