Exercice n°1 :

1°) $A\left(3\,;\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2\,;-\frac{3\pi}{4}\right)$; $C\left(4\,;\frac{2\pi}{3}\right)$; $D\left(5\,;-\frac{15\pi}{4}\right)$: voir figure ci-dessous.

Pour placer D on a fait le calcul suivant : $-\frac{15\pi}{4}=-\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=-2\times2\pi+\frac{\pi}{4}$

2°) $x_A=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $y_A=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$ d'où $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$

$x_B=2\cos\frac{-3\pi}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ et $y_B=2\sin\frac{-3\pi}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ d'où $B\left(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$

$x_C=4\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{4\times1}{2}=-2$ et $y_A=4\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées cartésiennes de C sont } \left(-2\,;2\sqrt{3}\right)}$

$x_D=5\cos\frac{-15\pi}{4}=5\cos\left(-\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=5\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $y_B=5\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées cartésiennes de D sont } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\,;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)}$

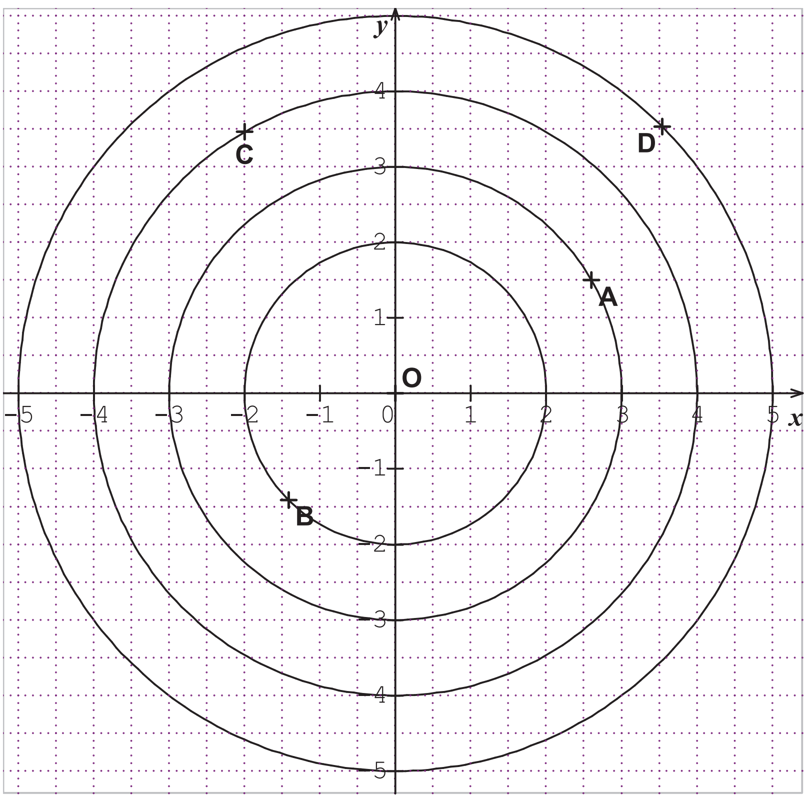
3°) E $\left(-3\,;-3\sqrt{3}\right)$, F(0 ; -5) , G(- $\sqrt{2}$; 0), D(-4 ; -4).

$\sqrt{(-3)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=6$; $\cos\theta_E=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_E=\frac{-3\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_E=-\frac{2\pi}{3}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées polaires de E sont } \left(6\,;-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$; $\cos\theta_F=\frac{0}{5}=0$ et $\sin\theta_F=\frac{-5}{5}=-1$ donc $\theta_F=-\frac{\pi}{2}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées polaires de F sont } \left(5\,;-\frac{\pi}{2}\right)}$



Exercice n°2 : $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

1°)(1,5 pts) $P(-1) = -2+2+1-1= 0$.
Donc $P(x)$ est factorisable par $x+1$ et $P(x) = (x+1)(2x^2 + bx - 1)$ où b est un réel à déterminer.
On développe pour trouver b :
$(x+1)(2x^2 + bx - 1) = 2x^3 + bx^2 - x + 2x^2 + bx - 1 = 2x^3 + (b+2)x^2 + (-1+b)x - 1$
Par identification des polynômes on obtient :
$b + 2 = 2$ et $-1 + b = -1$, d'où $b = 0$.
Finalement $\mathbf{P(x) = (x+1)(2x^2 - 1)}$

2°)(1 pt) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) = 0 \text{ ou } 2x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 1) = 0 \text{ ou } (\sqrt{2}x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Conclusion : $\boxed{P(x) = 0 \text{ a trois solutions } -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}}$

3°) (3 pts) $2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

On pose $X = \cos x$ et on obtient $2X^3 + 2X^2 - X - 1 = 0$

On retrouve l'équation du 2°) donc $X = -1$ ou $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

On en déduit que

$2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{ou } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2})$

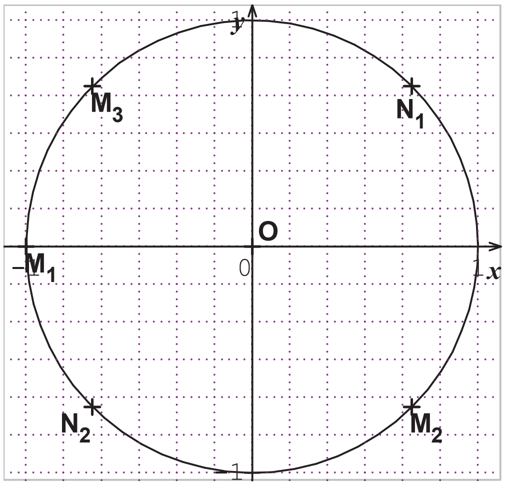
$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi\ [2\pi]$.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$\boxed{S = \left\{-\pi + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}}$



Exercice n°3 : On donne $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1°) pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} - \left(\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}\right) = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$

De plus $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin x > 0$. Finalement on obtient : $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$.

2°) $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Exercice n°4 :

$A = \cos(13\pi + x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) = \cos(12\pi + \pi + x) - \cos(x) + \cos(x) + \cos(x)$

$A = \cos(\pi + x) + \cos(x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0$.

$B = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right)$

$B = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0$

Exercice n°5 :

1°) a) On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left\{3x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \text{ou } 3x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right.$$

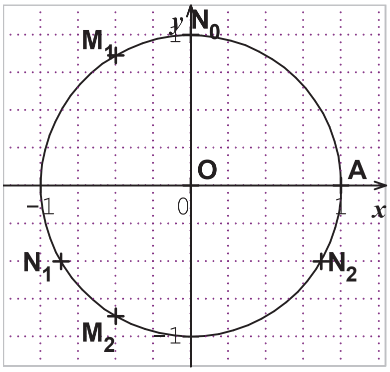
$$\Leftrightarrow\left\{3x=0+2k\pi \quad \text{ou } 3x=\pi+\frac{2\pi}{4}+2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{x=\frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou } 3x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{x=\frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou } x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $\left\{0\left[\frac{2\pi}{3}\right];\frac{\pi}{2}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$.

b)



♦La première équation admet trois solutions sur le cercle trigonométrique :
On choisit 3 valeurs consécutives de k pour déterminer les deux solutions.

Pour k = 0, $\frac{2k\pi}{3}=0$ et on obtient le point A

Pour k = 1, $\frac{2k\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ et on obtient le point M_1

Pour k = -1, $\frac{2k\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$ et on obtient le point M_2

Pour k = 2 on retombe sur M_2

Pour k = -2 on retombe sur M_1

♦La deuxième équation admet trois solutions sur le cercle trigonométrique :

Pour k = 0, $\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ et on obtient le point N_0

Pour k = 1, $\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$ et on obtient le point N_1

Pour k = -1, $\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$ et on obtient le point N_2

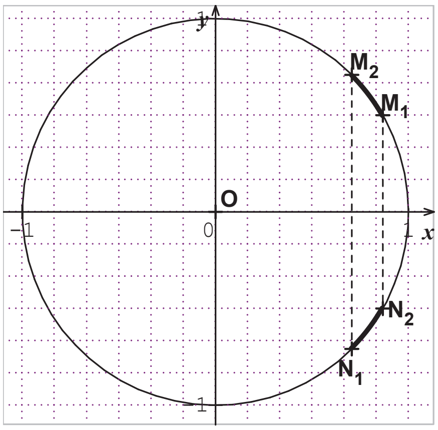
Pour k = 2 on retombe sur N_2

Pour k = -2 on retombe sur N_1

2°) L'ensemble des solutions dans $]-\pi,\pi]$ est $\left\{-\frac{5\pi}{6};-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{6};0;\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right\}$.

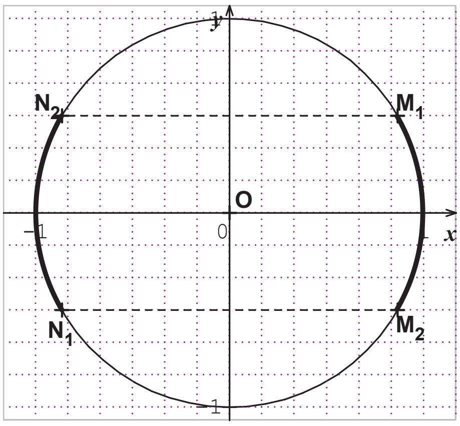
Exercice n°6 :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ et I = $]-\pi,\pi]$,



S= $\left[-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

b) $-\frac{1}{2}\le\sin x\le\frac{1}{2}$ et I = $[0;2\pi[$



S= $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$