Exercice n°1 : la courbe C représente la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3$ dans un repère du plan.

1°) $f(x) = -\frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x + 6$: f est une fonction polynôme donc <u>f est définie et dérivable sur ℝ</u> .

. Conclusion : $\boxed{f'(x) = -2x^2 - x + 6}$

2°) a) Une équation de la tangente T_A à C au point A $(0\,;f(0))$ est y = f'(0)(x-0) + f(0).
Or f'(0) =6 et f(0) = 3 donc y = 6x+3
b) Pour étudier la position relative de la courbe et de la tangente T_A on étudie le signe de f(x) –(6x+3).

$f(x) -(6x+3) = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3\right) - (6x+3) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = x^2\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)$

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc f(x) – (6x+3) est du signe de $-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$.

$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4}.$$

Conclusion : la courbe et tangente se coupent aux points d'abscisses $-\frac{3}{4}$ et 0

Pour tout réel x de $\left]-\frac{3}{4}\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$, f(x) – (6x –3) < 0 et donc la courbe est au dessous de la tangente.

Pour tout réel x de $\left]-\infty\,;-\frac{3}{4}\right[$, f(x) – (6x –3) > 0 et donc la courbe est au dessus de la tangente.

3°) La tangente à C au point d'abscisse x est parallèle à l'axe des abscisses ssi f'(x) = 0.

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $-2x^2 - x + 6 = 0$.

-2 est solution évidente donc $-2x^2 - x + 6$ = (x+2)(-2x +3) et donc l'autre solution est $\frac{3}{2}$.

Conclusion : la tangente à C est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et $\frac{3}{2}$

4°) Deux droites sont parallèles ssi elles ont même coefficient directeur.
Le coefficient de la droite d'équation y = 7x est 7
Donc : une tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation y = 7x ssi f'(x) = 7.

f'(x) = 7 $\Leftrightarrow$ $-2x^2 - x + 6 = 7$ $\Leftrightarrow$ $-2x^2 - x - 1 = 0$

Soit Δ le discriminant de $-2x^2 - x - 1 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 - 8 = -7$.

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution.
Il n'existe pas de tangente à la courbe parallèle à la droite d'équation y = 7x

Exercice n°2 : On considère la fonction trinôme f définie par f(x) = ax²+bx+c .
* f(1) = a+ b +c
or f(1) = 8 donc a + b + c = 8.
* f(-2) = 4a -2b + c
or f(-2) = 5 donc 4a – 2b + c = 5.

* f'(x) = 2ax + b
f'(-1) = -2a +b
Or f'(-1) = -2 donc -2a +b = -2.

D'où $\begin{cases} a+b+c=8 & (1) \\ 4a-2b+c=5 & (2) \\ -2a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ -3a+3b=3 \quad 1-(2) \\ -2a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ a-b=-1 \quad (1-(2)) \div (-3) \\ -2a+b=-2 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ a-b=-1 \\ -a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=a+1=4 \\ c=8-a-b=8-3-4=1 \end{cases}$

Conclusion : a= 3, b = 4 et c = 1 ; f(x) = 3x²+4x+1

Exercice n°3 : dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis la dérivée de la fonction f :
1°) f(x) = $x \times \cos x$
<u>f est définie et dérivable sur ℝ</u> .
f est de la forme f = uv avec u(x) = x et v(x) = cosx donc f ' = u ' v + u v '.
C'est-à-dire f'(x) = cosx – x sinx.

2°) $f(x) = (3x^2 + 2x)^2$: <u>f est définie et dérivable sur ℝ</u>.
On pose $u(x) = 3x^2 + 2x$ donc u'(x) = 6x+2
f = u² donc f' = 2uu'. $f'(x) = 2(3x^2 + 2x)(6x+2)$. Conclusion : $\boxed{f'(x) = 4(3x+1)(3x^2 + 2x)}$

3°) f(x) = $2x+2-\dfrac{2}{3x-1}$ = $2x+2-2\times\dfrac{1}{3x-1}$

f est définie si et seulement si $3x-1\neq 0$, c'est à dire si et seulement si $x\neq\dfrac{1}{3}$.

<u>f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$</u>.

On pose v(x) = 3x-1 donc v'(x) = 3

On sait que $\left(-2\times\dfrac{1}{v}\right)' = -2\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$.

donc $f'(x)=2-2\times\left(-\dfrac{3}{(3x-1)^2}\right)$. Conclusion : $\boxed{f'(x)=2+\dfrac{6}{(3x-1)^2}}$

4°) f(x) = $\dfrac{1-3x}{(x-2)^2}$ (écrire le numérateur sous forme d'un produit de facteurs)

<u>f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$</u>.
On pose u(x) = 1 – 3x et v(x) = $(x-2)^2$
u'(x) =-3
De plus v est de la forme w^2 donc v ' = 2w w ' soit v ' (x) = $2\times(x-2)\times 1=2(x-2)$.

f= $\dfrac{u}{v}$ donc f' = $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc f'(x)= $\dfrac{-3\times(x-2)^2-(1-3x)\times 2(x-2)}{\left((x-2)^2\right)^2}=\dfrac{(x-2)[-3\times(x-2)-2(1-3x)]}{\left((x-2)^2\right)^2}$

Donc $f'(x)=\dfrac{(x-2)(-3x+6-2+6x)}{\left((x-2)^2\right)^2}$. Conclusion : $\boxed{f'(x)=\dfrac{(x-2)(3x+4)}{(x-2)^4}}$

5°) f(x) = $(-2x+3)^4$. <u>f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$</u> .
f(x) = u(-2x+3) où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par u(x) = x^4.
On en déduit que f'(x) = -2u'(-2x+3). Or pour tout réel x, u'(x) = $4x^3$ donc f '(x) = $-2\times 4\times(-2x+3)^3$. Conclusion : $\boxed{f'(x) = (-8)(-2x+3)^3}$

6°) f(x) = $\sqrt{5-3x}$
f(x) = u(5-3x) où u est la fonction racine carrée.
u est dérivable pour x >0 donc f est dérivable pour tout réel x tel que 5-3x > 0, c'est à dire pour tout réel x appartenant à $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{3}\right[$. On en déduit que f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{3}\right[$.

Or pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc pour tout réel x de $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{3}\right[$, f '(x) = $-3u'(5-3x)=\dfrac{-3}{2\sqrt{5-3x}}$.

7°) f(x) = $3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$. <u>f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$</u> .

f(x) = $3u\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par u(x) = 3cos(x). On en déduit que f '(x) = $3\times\left(-2u'\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\right)$

Or pour tout réel x, u'(x) = -sin(x) donc f '(x) = $-6\times\left[-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\right]$. Conclusion : $\boxed{f'(x) = 6\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}$.

8°) f(x) = (2x-3) $\sqrt{2-x}$
f(x) existe si et seulement si 2-x ≥ 0. Or $2-x\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq x$ donc $\boxed{\text{f est définie sur }]-\infty\,;2]}$.
f est de la forme f = uv avec u(x) = 2x-3 et v(x) = $\sqrt{2-x}$. v(x) = h(2-x) où h est la fonction racine carrée.
h est dérivable pour x >0 donc v est dérivable pour tout réel x tel que 2-x > 0, c'est à dire pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;2[$. On en déduit que $\boxed{\text{f est dérivable sur }]-\infty\,;2[}$.

Or pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc pour tout réel x de $]-\infty\,;2[$, v '(x) = $-h'(2-x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$.

f'(x) = $2\sqrt{2-x}-(2x-3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{\left(2\sqrt{2-x}\right)^2}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{2x-3}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{\left(2\sqrt{2-x}\right)^2-2x+3}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{4(2-x)-2x+3}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{11-6x}{2\sqrt{2-x}}$

9°) f(x) = $(x-1)(3-7x)^4$
f'(x) = $1\times(3-7x)^4+(x-1)\times 4(3-7x)^3\times(-7)=(3-7x)^3[(3-7x)-28(x-1)]=(3-7x)^3(-35x+31)$