1ère S2 **Correction de l'évaluation n°4**

Exercice n°1 (5 points) : h(x) = $2x^2 - 2x + 1$

1) a) h(x) $= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

b) La courbe C_h est une parabole tournée vers le haut car le coefficient de x²est positif. Son sommet est S $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et l'axe de symétrie est la droite d'équation x = $\frac{1}{2}$.

2) h(x) = 0 $\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

Cette égalité est impossible car un carré est toujours positif.
Donc l'équation n'a pas de solution.
Interprétation graphique : la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

3) h(x) > 0 $\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{1}{4}$.

Cette inégalité est vraie quel que soit x.
Donc l'ensemble de solution des solutions est $\mathbb{R}$.
Interprétation graphique : la courbe est au dessus de l'axe des abscisses.

Exercice n°2 (1,5 points) : le plan P est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

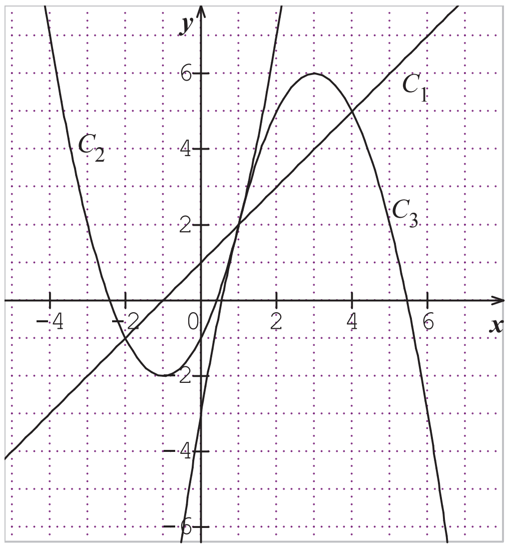
une équation de la parabole P de sommet S (-1 ; -3) est y = $a(x+1)^2 - 3$.

le point A (1 , 5) est sur P donc 5 = $a \times (1+1)^2 - 3$. Soit 5 = 4a -3. D'où a = 2.

Conclusion : une équation de la parabole P est y = $2(x+1)^2 - 3$.

Exercice n°3 (4,5 points) : soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) $= x^2 + 2x - 1$, g(x) = $-x^2 + 6x - 3$ et h(x) = x + 1

1°) f est associé à C_2, g à C_3 et h à C_1.



2°) a) f(x) = g(x) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 6x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

f(x) = g(x) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1.

3°) a) g(x) < h(x) $\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 3 < x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 < 0$

1 est racine évidente de $-x^2 + 5x - 4$ donc $-x^2 + 5x - 4$ =(x-1)(-x+4).

$-x^2 + 5x - 4$ est du signe de a = -1, c'est-à-dire négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Donc S = $\left]-\infty ; 1\right[\cup \left]4 ; +\infty\right[$

b) Sur $\left]-\infty ; 1\right[\cup \left]4 ; +\infty\right[$ C_g est en dessous de C_h.

Exercice n°4 (8 points) :

1°) Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^4 - 15x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 - 15X - 8 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$

Soit Δ le discriminant de l'équation $2X^2 - 15X - 8 = 0$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 289 = 17^2$. $\Delta > 0$ donc l'équation $2X^2 - 15X - 8 = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$X_1 = \frac{15 - 17}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{15 + 17}{4} = 8$

On en déduit que $2x^4 - 15x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 8$.

$x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution.

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } 2x^4 - 15x^2 - 8 = 0 \text{ a deux solutions } -2\sqrt{2} \text{ et } 2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{3x(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{x+2}{(x+1)(x+2)} \Leftrightarrow \dfrac{3x(x+1)+1}{(x+2)(x+1)}-\dfrac{x+2}{(x+1)(x+2)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+3x+1-x-2}{(x+2)(x+1)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x+1)}=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0$ et $x+2(x+1)\neq 0$

-1est solution évidente de 3x²+2x-1 = 0 donc 3x²+2x-1 = (x+1)(3x-1)

Donc 3x²+2x-1 = 0 a deux solutions -1 et $\dfrac{1}{3}$.

-1 est valeur interdite.

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation a une seule solution } \dfrac{1}{3}}$.

c) $\sqrt{3x+3}=3x+1$

Rappels : $\boxed{\sqrt{a} \textit{ est défini si et seulement si } a \geq 0}$ *et* $\boxed{\sqrt{a}=b \textit{ si et seulement si, } b\geq 0 \textit{ et } a=b^2}$.

Pour que l'équation soit définie, il faut : $3x+3\geq 0$. C'est à dire x $\geq$ -1.

Pour tout réel x de [-1 , +∞[:

$\sqrt{3x+3}=3x+1 \Leftrightarrow \left[3x+3=(3x+1)^2 \text{ et } 3x+1\geq 0\right]$

$\Leftrightarrow (\,3x+3=9x^2+6x+1 \text{ et } 3x\geq -1)$

$\Leftrightarrow (\,9x^2+3x-2=0 \text{ et } x\geq -\dfrac{1}{3})$

Soit Δ le discriminant de $9x^2+3x-2=0$: Δ = 3² -4x(9)x(-2) = 81.

Δ > 0 donc $9x^2+3x-2=0$ a deux solutions : $x'=\dfrac{-3-9}{18}=-\dfrac{2}{3}$ et $x''=\dfrac{-3+9}{18}=\dfrac{1}{3}$.

$-\dfrac{2}{3}$ n'est pas supérieur à $-\dfrac{1}{3}$ donc $-\dfrac{2}{3}$ n'est pas solution.

$\dfrac{1}{3}$ est supérieur à $-\dfrac{1}{3}$ donc $\dfrac{1}{3}$ est solution.

Conclusion : l'équation $\sqrt{3x+3}=3x+1$ a une solution $\dfrac{1}{3}$.

2°) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ x(6-x)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ 6x-x^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ -x^2+6x-6=0 \end{cases}$

Soit Δ le discriminant de $-x^2+6x-6=0$

Δ = 6² -4x(-1)x(-6) = 36 – 24 = 12.

Δ > 0 donc –x²+6x-6=0 a deux solutions :

$x'=\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{-2}=3+\sqrt{3}$ *et* $x''=\dfrac{-6+2\sqrt{3}}{-2}=3-\sqrt{3}$

Conclusion : $\boxed{\text{le système a deux couples de solutions } \left(3+\sqrt{3}\,;3-\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(3-\sqrt{3}\,;3+\sqrt{3}\right)}$

Exercice n°5 *(4 points) : a)* $-x^2+2x-2\leq 0$

Δ = 2² -4x(-1)x(-2) = 4 –8 = -4.

Δ < 0 donc $-x^2+2x-2$ est du signe de a = -1 , c'est à dire négatif pour tout réel x.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc ℝ

b) $\dfrac{-x^2+2x-2}{6x^2-5x+1}\geq 0$. Soit Δ le discriminant de $6x^2-5x+1$

Δ = (-5)² -4x6x1 = 25 –24 = 1. Δ > 0 donc $6x^2-5x+1$ a deux racines : $x'=\dfrac{5-1}{12}=\dfrac{1}{3}$ et $x''=\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{1}{2}$

x	-∞		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		+∞
$-x^2+2x-2$		-		-		-	
$6x^2-5x+1$		+	0	-	0	+	
$\dfrac{-x^2+2x-2}{6x^2-5x+1}$		-	‖	+	‖	-	

S = $\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[$