Exercice n°1 : $(x-2)(2x-3)-(3-2x)(x-1) \geq (4x^2-12x+9)$

$(x-2)(2x-3)+(2x-3)(x-1) \geq (2x-3)^2$

$(x-2)(2x-3)+(2x-3)(x-1)-(2x-3)^2 \geq 0$

$(2x-3)[(x-2)+(x-1)-(2x-3)] \geq 0$

$(2x-3)(x-2+x-1-2x+3) \geq 0$

$(2x-3) \times 0 \geq 0$

Cette inégalité est vraie pour tout réel x.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathbb{R}}$

Exercice n°2 :

1°) $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)^2}$ et $g : x \mapsto x-1$.

f est définie si et seulement si $(x-1)^2 \geq 0$. Or un carré est toujours positif ou nul donc $D_f = \mathbb{R}$.

Par ailleurs $D_g = \mathbb{R}$. On a donc $D_f = D_g$

f(-3) = 4 et g(-3)=-4. f(-3) $\neq$ g(-3) donc f n'est pas égal à g.

Remarque : pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

Donc pour tout réel x de $[1 ; +\infty[$, f(x) = g(x), et pour tout réel x de $]-\infty ; 1[$, f(x) = -g(x).

2°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

f est définie si et seulement si $x-1 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

g est définie si et seulement si $(x-1 \neq 0 \text{ et } x^2-2x+1 \neq 0)$, c'est-à-dire si et seulement si $(x \neq 1 \text{ et } (x-1)^2 \neq 0)$

donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$ =f(x).

Conclusion : f = g.

Exercice n°3 : f est la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par f (x) = $-2x^2 + 12x - 14$.

1°) pour tout réel x, $-2(x-3)^2 + 4 = -2(x^2-6x+9)+4 = -2x^2-12x-18+4 = -2x^2-12x-14$ =f(x).

2°) Soit u et v deux réels de $[3,+\infty[$ tels que $3 \leq u < v$

On ajoute –3 : $0 \leq u-3 < v-3$

la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2$.

D'où $0 \geq -2(u-3)^2 > -2(v-3)^2$. D'où $4 \geq -2(u-3)^2 + 4 > -2(v-3)^2 + 4$.

On en déduit que $4 \geq f(u) > f(v)$.

Conclusion : f est décroissante sur $[3 ; +\infty[$

3°) f(3) = -18 +36 –14 = 4.

Pour tout réel x, f(x) - 4= $-2(x-3)^2 + 4 - 4 = -2(x-3)^2$.

Pour tout réel x , $(x-3)^2 \geq 0$ donc $-2(x-3)^2 \leq 0$ donc $f(x) - 4 \leq 0$.

Donc pour tout réel x, f(x) ≤ **f(3) avec f(3) = 4.**

Conclusion : 4 est le maximum de f sur $]-\infty ; +\infty[$, atteint pour x = 3.

Exercice n°4 **:** f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{-x+2} + 3$.

1°) f(x) existe si et seulement si $-x+2 \neq 0$, c'est à dire si et seulement si $x \neq 2$.

Le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

2°) Il semble que la fonction f soit strictement croissante sur $]-\infty ; 2[$ puis strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$

3°) Prouvons le : soient u et v deux réels de $]2 ; +\infty[$ tels que $2 < u < v$

On sait que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $0 > -u+2 > -v+2$.

On sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ donc $\dfrac{1}{-u+2} < \dfrac{1}{-v+2}$.

on ajoute 3 $\dfrac{1}{-u+2} + 3 < \dfrac{1}{-v+2} + 3$

Autrement dit $f(u) < f(v)$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$

Exercice n°5 :

1°) $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$ on a : $\boxed{k=\frac{3}{8}}$; $\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ on a : $\boxed{m=-\frac{3}{5}}$.

2°) $5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ donc $5\overrightarrow{AM}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}$. Soit $5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

On obtient $3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. On en déduit que $3\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AB}$.

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$ Point M voir figure.

Exercice 6 :

RSTV est un parallélogramme. $\overrightarrow{RA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}-\frac{2}{3}\overrightarrow{VT}$.

1) Points A et B : voir figure.

2) $\overrightarrow{VB}=\overrightarrow{VT}+\overrightarrow{TB}$ d'après la relation de chasles.

Or $\overrightarrow{TB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}-\frac{2}{3}\overrightarrow{VT}$ donc $\overrightarrow{VB}=\overrightarrow{VT}+\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}-\frac{2}{3}\overrightarrow{VT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{VT}+\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}$

De plus, RSTV est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{VT}$.

Donc $\overrightarrow{VB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}+\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}$.

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{VB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}+\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}}$

3) $3\overrightarrow{VB}=3\times\frac{1}{5}\overrightarrow{RV}+3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}=\frac{3}{5}\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RA}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{VB}$ et $\overrightarrow{RA}$ sont colinéaires .

Conclusion : $\boxed{\text{les droites (RA) et (VB) sont parallèles}}$.

Exercice n°7 :

Données : (1) ABC est un triangle.

(2) D est le symétrique de A par rapport à B : $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$

(3) E est le milieu de [AC] : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(4) F est le point tel que $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Montrons que les points D, E et F sont alignés, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'après (2) et (3)

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ d'après (2) et (4)

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)==\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$

Exercice n°8 :

Données : ABCD est un parallélogramme,

M, N et P sont définis par : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Démontrons que les droites (BM) et (PN) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Or ABCD un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

D'où $\overrightarrow{PN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}\right)$

On a donc $\overrightarrow{PN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$