

I) Contrôle des connaissances :

Définition 1 : une fonction f , définie sur D_f est impaire si pour tout x de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Définition 2 : soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non). Soit f une fonction définie au moins sur I .

- f est strictement croissante sur I signifie que : pour tous réels u et v de I , si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$
- f est décroissante sur I signifie que : pour tous réels u et v de I , si $u < v$ alors $f(u) \geq f(v)$

II) Exercices :

Exercice n°1 : a) $(x-2)(5x-2) = (2-5x)(x-1) \Leftrightarrow (x-2)(5x-2) - (2-5x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(5x-2) + (5x-2)(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow (5x-2)[(x-2) + (x-1)] = 0 \Leftrightarrow (5x-2)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow (5x-2) = 0$ ou $(2x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Conclusion : l'équation a deux solutions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{2}$

b) $(2x+1)^2 - (3x+5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow [(2x+1) - (3x+5)][(2x+1) + (3x+5)] \leq 0$
 $(2x+1)^2 - (3x+5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (-x-4)(5x+6) \leq 0$

On étudie le signe du produit $(-x-4)(5x+6) \leq 0$ à l'aide du tableau ci contre.

Conclusion : $S =]-\infty; -4] \cup \left[-\frac{6}{5}; +\infty\right[$

x	$-\infty$	-4	$-\frac{6}{5}$	$+\infty$
-x-4		+	0	-
5x+6		-	0	+
Produit		-	0	+

Exercice n°2 : 1°) a) $f: x \mapsto \frac{x}{25x^2-9}$. $f(x)$ existe si et seulement si $25x^2 - 9 \neq 0$.

$25x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (5x)^2 - 3^2 \neq 0 \Leftrightarrow (5x)^2 - 3^2 \neq 0 \Leftrightarrow (5x-3)(5x+3) \neq 0$

Conclusion : le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right\}$.

b) $h: x \mapsto \sqrt{5+2x^2}$; $h(x)$ existe si et seulement si $5+2x^2 \geq 0$.

On sait qu'un carré est toujours positif donc pour tout réel x , $x^2 \geq 0$

C'est à dire pour tout réel x , $2x^2 \geq 0$ et donc $5+2x^2 \geq 5 > 0$. On en déduit que $5+2x^2$ est toujours positif.

Conclusion : le domaine de définition de la fonction h est $\mathbb{R}$.

c) $i: x \mapsto \frac{\sqrt{3-x}}{x}$.

$i(x)$ existe si et seulement si $(3-x \geq 0 \text{ et } x \neq 0)$ c'est à dire si et seulement si $(3 \geq x \text{ et } x \neq 0)$ donc $D_i =]-\infty; 0[\cup]0; 3]$

2°) Le domaine de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout réel x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right\}$, $f(-x) = \frac{-x}{25(-x)^2-9} = -\frac{x}{25x^2-9} = -f(x)$

Conclusion : f est impaire.

Le domaine de définition de la fonction h est symétrique par rapport à 0.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $h(-x) = \sqrt{5+2(-x)^2} = \sqrt{5+2x^2} = h(x)$ donc h est paire.

Le domaine de définition de la fonction i n'est pas symétrique par rapport à 0 donc i n'est ni paire ni impaire.

Exercice n°3 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-6}{x+2}$

1°) a) $f(x) = -3$ a deux solutions 0 et -3.

b) $f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2-6}{x+2} = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2-6}{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6}{x+2} + \frac{3(x+2)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6+3x+6}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2+3x = 0$ et $x+2 \neq 0$
 $\Leftrightarrow (x(x+3) = 0 \text{ et } x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x+3=0 \text{ et } x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=-3)$

On retrouve bien le résultat obtenu graphiquement.

2°) Pour tout réel h tel que $-2+h$ appartienne à $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, c'est à dire pour tout réel h non nul, $-2-h$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$f(-2+h) = \frac{(-2+h)^2 - 6}{-2+h+2} = \frac{4-4h+h^2-6}{h} = \frac{-4h+h^2-2}{h}$$

$$f(-2-h) = \frac{(-2-h)^2 - 6}{-2-h+2} = \frac{-(2+h)^2 - 6}{-2-h+2} = \frac{(2+h)^2 - 6}{-2-h+2} = \frac{4+4h+h^2-6}{-h}$$

$$f(-2-h) = \frac{4h+h^2-2}{-h} = -\frac{4h+h^2-2}{h} = \frac{-4h-h^2+2}{h}$$

$$f(-2+h)+f(-2-h) = \frac{-4h+h^2-2}{h} + \frac{-4h-h^2+2}{h} = \frac{-8h}{h} = -8.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{f(-2+h)+f(-2-h)}{2} = -4$$

Conclusion : la courbe représentative de f admet le point $I(-2; -4)$ pour centre de symétrie.

3°) a) la droite Δ représente la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 6$.

$g(-1) = -5$ donc Δ passe par $I(-1, -5)$. $g(-3) = -3$ donc Δ passe par $A(-3, -3)$.

$g(-5) = -1$ donc Δ passe par $I(-5, -1)$.

b) C_f est en dessous de Δ lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]-2; -1[$.

4°) a) Pour tout réel x différent de -2 :

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 2} - (-x - 6) = \frac{x^2 - 6}{x + 2} + x + 6 = \frac{x^2 - 6}{x + 2} + x + 6$$

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2 - 6 + x^2 + 8x + 12}{x + 2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{x + 2}$$

$$\text{Or } \frac{(2x+2)(x+3)}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x + 2x + 6}{x+2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{x+2}.$$

$$\text{Conclusion : pour tout réel } x \neq -2, f(x) - g(x) = \frac{(2x+2)(x+3)}{x+2}.$$

b) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ à l'aide du tableau ci-contre :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
$2x + 2$	-	-	-	0	+	
$x + 3$	-	0	+	+	+	
$x + 2$	-	-	0	+	+	
$f(x) - g(x)$	-	0	+	-	0	+

Conclusion : D'après le tableau :

$f(x) - g(x) > 0$ sur $] -3; -2[\cup] -1; +\infty [$

$f(x) - g(x) = 0$ lorsque $x = -3$ ou $x = -1$.

$f(x) - g(x) < 0$ sur $] -\infty; -3[\cup] -2; -1[$

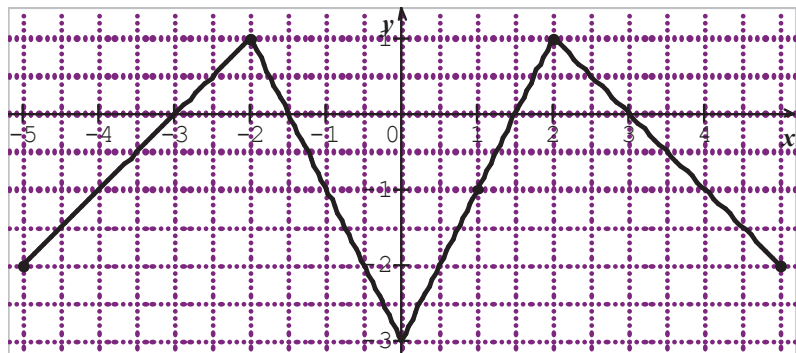
c) $f(x) - g(x) < 0$ sur $] -\infty; -3[\cup] -2; -1[$ donc C est en dessous de Δ lorsque $x \in] -\infty; -3[\cup] -2; -1[$: le 3°)b) est bien validé.

$$\text{Exercice n°4 : } f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

♦ Sur $[0, 2]$ la représentation graphique de f est un segment de droite $[AB]$ avec $A(0, -3)$ et $B(2, 1)$

♦ Sur $]2, 5]$ la représentation graphique de f est un segment de droite $[BC]$ avec $B(2, 1)$ et $C(5, -2)$:

On sait que la représentation graphique d'une fonction paire, dans un repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice n°5 : 1°) pour tout réel x , on a $-(x+2)^2 + 5 = -(x^2 + 4x + 4) + 5 = -x^2 - 4x + 1 = f(x)$. Conclusion : $f(x) = -(x+2)^2 + 5$

2°) Soit deux réels u et v de $] -\infty; -2]$ tels que $u < v \leq -2$.

On ajoute -2 : $u+2 < v+2 \leq 0$.

La fonction carrée est décroissante sur $] -\infty; 0]$ donc $(u+2)^2 > (v+2)^2 \geq 0$

On multiplie par -1 qui est négatif : $-(u+2)^2 < -(v+2)^2 \leq 0$

On ajoute 5 : $-(u+2)^2 + 5 < -(v+2)^2 + 5 \leq 5$

C'est à dire : $f(u) < f(v)$

Conclusion : f est strictement croissante sur $] -\infty; -2]$