

Exercice n°1 : $P(z) = z^3 + (1 - 2\sqrt{3})z^2 + 2(2 - \sqrt{3})z + 4$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. a) $P(-1) = -1 + (1 - 2\sqrt{3}) - 2(2 - \sqrt{3}) + 4 = P(z) = -1 + 1 - 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} + 4 = 0$.

b) $P(z)$ est factorisable par $z+1$.

C'est à dire $P(z)$ peut s'écrire sous la forme $P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.

On développe et on ordonne $(z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

En procédant par identification avec $P(z) = z^3 + (1 - 2\sqrt{3})z^2 + 2(2 - \sqrt{3})z + 4$,

on obtient : $a = 1$; $b + a = 1 - 2\sqrt{3}$; $c + b = 4 - 2\sqrt{3}$ et $c = 4$

Donc $a = 1$; $b = -2\sqrt{3}$; $c = 4$.

Conclusion : $P(z) = (z+1)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

c) Soit Δ le discriminant de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$:

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$$

$\Delta < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \sqrt{3} + i.$$

d) d'après b) et c) $P(z) = 0$ a trois solutions $\sqrt{3} - i$, $\sqrt{3} + i$ et -1 .

2°) $A(\sqrt{3}, -1)$ $B(\sqrt{3}, 1)$

$$AB = |z_2 - z_1| = |\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} - i)| = |2i| = 2.$$

$$OA = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Deux nombres complexes conjugués ont même module donc $OB = |z_2| = 2$

Donc $OA = OB = AB$.

Donc le triangle OAB est équilatéral.

Exercice n°2 (bac GM a 2006) : on considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 - 2i$. On pose $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

$$1^\circ) z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 + 2i)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i + 2i\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + i(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})}{8}.$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 2i(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}.$$

D'où $z_3 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$

La partie réelle de z_3 est $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

La partie imaginaire de z_3 est $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

2°) a) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$. Soit $|z_1| = 2\sqrt{2}$

Soit θ_1 un argument de z_1 : $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\arg z_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Soit $|z_2| = 2\sqrt{2}$.

Soit θ_2 un argument de z_2 : $\cos \theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\arg z_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

b) $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ donc on en déduit que $|z_3| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. C'est à dire $|z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ Soit $|z_3| = 1$.

$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ donc on en déduit que $\arg(z_3) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. C'est à dire $\arg(z_3) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $\arg(z_3) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$.

c) Conclusion :
$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}$$

3°) D'après le 1°) et 2°) b) on a $z_3 = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}$ et $z_3 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$.

Ce sont deux écritures du même nombre, donc

les parties réelles sont égales : $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

et les parties imaginaires sont égales : $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Conclusion :
$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) Nature du triangle OAB :

d'après le 2°) a) $OA = |z_1| = 2\sqrt{2}$

et $OB = |z_2| = 2\sqrt{2}$

Donc le triangle OAB est isocèle en O.

Exercice n°3 : 1°) a) $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = 2 + i$.

b) Réciproque du théorème de Pythagore : Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Nous avons donc besoin de calculer AB, AC et BC.

Théorème : Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 : $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$.

Donc $AB = |z_B - z_A|$

$z_B - z_A = -1 - i - (-1 + i) = -2i$.

Si la forme algébrique est $z = a + bi$ alors le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Donc $|z_B - z_A| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Conclusion : $AB = 2$.

De même $AC = |z_C - z_A|$. Or $z_C - z_A = 2 + i - (-1 + i) = 3$ donc $|z_C - z_A| = |3 + 0i| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$. Conclusion : $AC = 3$.

De même $BC = |z_C - z_B|$. Or $z_C - z_B = 2 + i - (-1 - i) = 3 + 2i$ donc $|z_C - z_B| = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Conclusion : $BC = \sqrt{13}$.

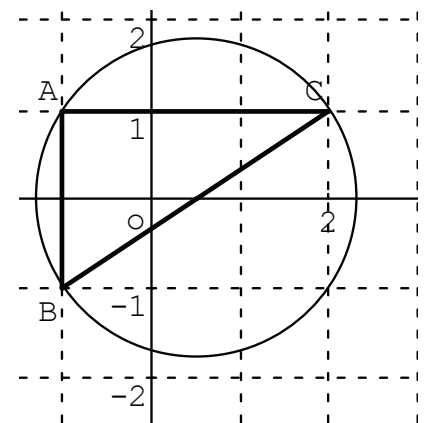
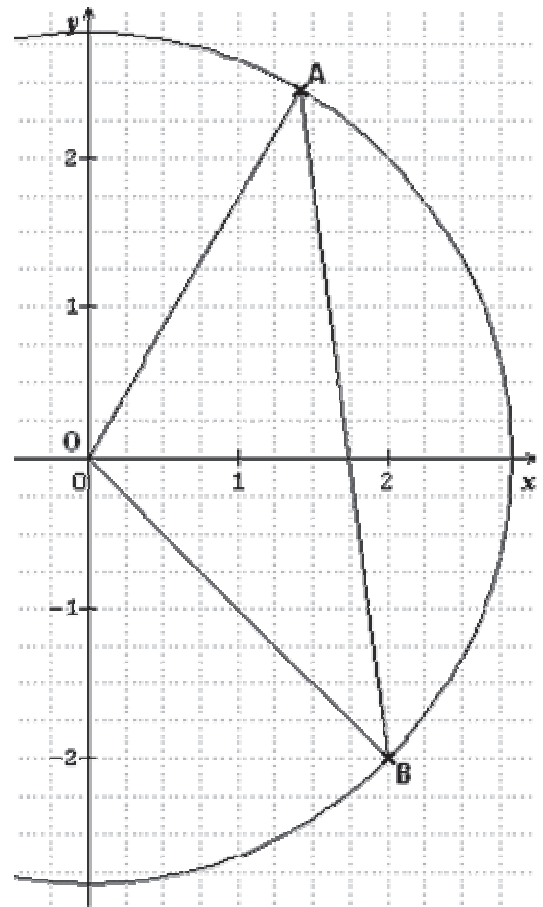
$AB^2 + AC^2 = 4 + 9 = 13$ et $BC^2 = 13$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Conclusion : d'après la réciproque du théorème de pythagore, le triangle ABC est rectangle en A

c) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, d'où :

$z_\Omega = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-1 - i + 2 + i}{2} = \frac{1}{2}$.

Le rayon r est $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.



Exercice n°4 : (d'après bac STI GE 2008) :

1) a. $z^2 + 6\sqrt{3}z + 36 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = (6\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 36 = 108 - 144 = -36$.

$\Delta < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(6\sqrt{3}) + i\sqrt{-(-36)}}{2 \times 1} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{2} = -3\sqrt{3} + 3i$$

Conclusion : L'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ a deux solutions $z_1 = -3\sqrt{3} + 3i$ et $z_2 = -3\sqrt{3} - 3i$

2. a) $z_A = -3\sqrt{3} + 3i$ donc $|z_A| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$.

Soit θ_A un argument de z_A : $\cos \theta_A = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ donc $\theta_A = \frac{5\pi}{6}$.

Conclusion : le module de z_A est 6 et un argument de z_A est $\theta_A = \frac{5\pi}{6}$, $z_A = \left[6; \frac{5\pi}{6} \right]$

Deux nombres complexes conjugués ont même module et deux argument opposés

Conclusion : le module de z_B est 6 et un argument de z_B est $\theta_B = -\frac{5\pi}{6}$, $z_B = \left[6; -\frac{5\pi}{6} \right]$

b) La forme trigonométrique de z_A est $z_A = 6 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 6i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

c) Voir figure. On place les points A, B et C de coordonnées respectives $(-3\sqrt{3}, 3)$, $(-3\sqrt{3}, -3)$ et $(-6\sqrt{3}, 0)$ avec $\sqrt{3} \approx 1,732$

3.a. $z_A - z_B = (-3\sqrt{3} + 3i) - (-3\sqrt{3} - 3i) = 6i$

Donc $AB = |6i| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$z_C - z_B = -6\sqrt{3} - (-3\sqrt{3} - 3i) = -3\sqrt{3} + 3i$

$CB = |-3\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$

$z_C - z_A = -6\sqrt{3} - (-3\sqrt{3} + 3i) = -3\sqrt{3} - 3i$

$CA = |-3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$

On constate que $AB = CB = CA = 6$.

Conclusion : le triangle ACB est équilatéral.

b) 1^{ère} méthode :

Le vecteur $\vec{OA}$ a pour affixe $z_A = -3\sqrt{3} + 3i$

Le vecteur $\vec{BC}$ a pour affixe $z_C - z_B = -3\sqrt{3} + 3i$.

$z_C - z_B = z_A$ donc $\vec{BC} = \vec{OA}$. Conclusion : le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

De plus $CA = CB$.

Donc le parallélogramme OACB a deux côtés consécutifs de même longueur. Conclusion : OACB est un losange.

2^{ème} méthode : $OA = |z_A| = 6$. $OB = |z_B| = 6$. Conclusion : $OA = AC = CB = BO = 6$ et donc le quadrilatère OACB est un losange.

