

Exercice n°1 :

Soit $P(z) = z^3 + (1 - 2\sqrt{3})z^2 + 2(2 - \sqrt{3})z + 4$ où z appartient à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

1. a) Calculer $P(-1)$. b) Déterminer les nombres a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c).$$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

d) En déduire les solutions de $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique sera égale à 4 cm.

Soit A le point d'affixe $z_1 = \sqrt{3} - i$ et B celui d'affixe $z_2 = \sqrt{3} + i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 puis écrire z_1 sous forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de z_2

c) Placer A et B et démontrer que le triangle AOB est équilatéral.

Exercice n°2 (bac GM a 2006) : on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 - 2i$. On pose $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire z_3 sous forme algébrique.

2.a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_3 .

c) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique.

3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

a) Construire les points A et B, images respectives de z_1 et z_2 .

b) Déterminer la nature du triangle OAB.

Exercice n°3 : dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , L'unité graphique sera égale à 2 cm.

On donne les points A, B, C d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i, z_B = -1 - i \text{ et } z_C = 2 + i.$$

1. Représenter les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Le justifier.

3. En déduire l'affixe du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r de ce cercle.

Exercice n°4 : (d'après bac STI GE 2008) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation : $z^2 + 6\sqrt{3}z + 36 = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3\sqrt{3} + 3i$, $z_B = -3\sqrt{3} - 3i$ et $z_C = -6\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B .

b. Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme trigonométrique

c. Placer les points A, B et C dans le plan muni d'un repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

3. a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.