***Exercice 1 :*** Soit h(x) = $x^3 + 5x^2 - 14x + 8$

**1**°) Le polynôme h(x) est factorisable par x + 2 si et seulement si h(-2) = 0.
h(-2) = -8 + 20 +28 + 8 = 48. h(-2) n'est pas égal à 0 donc h n'est pas factorisable par x +2.

**2**°) h(1) = 1 +5 – 14 + 8 = 0 donc h(x) est factorisable par x – 1.
C'est à dire h(x) = (x –1) $\times$ Q(x) où Q(x) est un polynôme de degré 2.

Par identification, on détermine immédiatement les coefficients des monômes de degré 2 et 0 : ils sont respectivement égaux à 1 et -8.
On a donc h(x) = ( x – 1) ( $x^2$ + bx – 8) où b est à trouver.
On développe et on ordonne : h(x) = $x^3 + bx^2 - 8x - x^2 - bx + 8 = x^3 + (b-1)x^2 + (-8-b) + 8$.

Par identification avec h(x) = $x^3 + 5x^2 - 14x + 8$ , on obtient : $\begin{cases} b-1=5 \\ -8-b=-14 \end{cases}$. d'où b = 6

Conclusion : $\boxed{h(x) = (x-1)(x^2+6x-8)}$

***Exercice n°2 :*** Soit h(x) = $6x^3 - x^2 - 20x + 12$

**1**°) A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice on observe que h(-2) = 0 et h(1,5) = 0 donc h est factorisable par x + 2 et x - $\frac{3}{2}$.

On en déduit que h (x) = $(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\times Q(x)$ où Q est un polynôme à déterminer.

h est de degré 3 et Q est un polynôme de degré 1. Par identification, on détermine les coefficients des monômes

Conclusion : $\boxed{h(x) = (x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(6x-4)}$

**2**°) h(x) = 0 $\Leftrightarrow (x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(6x-4)=0 \Leftrightarrow (x+2)=0$ ou $\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$ ou $(6x-4)=0$.

Conclusion : $\boxed{\text{h(x) = 0 a trois solutions } -2,\ \frac{3}{2} \text{ et } \frac{2}{3}}$

3°) h(x) > 0 $\Leftrightarrow (x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(6x-4)>0$.

On résout cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+2 | | – | 0 | + | | + | | + | |
| $x-\frac{3}{2}$ | | – | | – | | - | 0 | + | |
| 6x-4 | | - | | - | 0 | + | | + | |
| h(x) | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Conclusion : h(x) > 0 a pour ensemble de solution $\left]-2\,;\frac{2}{3}\right[ \cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

***Exercice n°3*** : f(x) = $2x^2 + 3x - 2$.
-2 est racine apparente donc f est factorisable par x + 2, c'est à dire f(x) = (x+2)$\times$Q(x) où Q(x) est un polynôme de degré 1.
Conclusion : $\boxed{f(x) = (x+2)(2x-1)}$.

***Exercice n°4*** : pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ , on a **:** $\frac{x^2-6x+9}{1-2x} = ax+b+\frac{c}{1-2x}$

Or $ax+b+\frac{c}{1-2x} = \frac{(ax+b)(1-2x)}{1-2x}+\frac{c}{1-2x} = \frac{ax-2ax^2+b-2bx}{1-2x}+\frac{c}{1-2x} = \frac{-2ax^2+(a-2b)x+b+c}{1-2x}$.

On a donc : pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ , $\frac{x^2-6x+9}{1-2x} = \frac{-2ax^2+(a-2b)x+b+c}{1-2x}$

Donc $x^2-6x+9 = -2ax^2+(a-2b)x+b+c$ pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

D'après le théorème d'identification : $\begin{cases} -2a=1 \\ a-2b=-6 \\ b+c=9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ -2b=-6+\frac{1}{2} \\ c=9-b \end{cases}$. C'est à dire : $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ -2b=-\frac{11}{2} \\ c=9-b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{11}{4} \\ c=\frac{36-11}{4} \end{cases}$ donc c = $\frac{25}{4}$.

Conclusion : a= $-\frac{1}{2}$ , b = $\frac{11}{4}$ et c = $\frac{25}{4}$ et $\frac{x^2-6x+9}{1-2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{4} + \frac{\frac{25}{4}}{1-2x} == -\frac{1}{2}x + \frac{11}{4} + \frac{25}{4(1-2x)}$

***Exercice n°5 :*** $f(x) = -2x^3 + x^2 - 2x + a$.
-2 est racine de f si et seulement si f(-2) = 0. Or $f(-2) = -2\times(-2)^3 + (-2)^2 - 2x(-2) + a = 16 + 4 + 4 + a = 24 + a$.
Donc f est factorisable par x +2 si et seulement si 24 + a = 0. Conclusion : $\boxed{\text{f est factorisable par x +2 si et seulement si a = -24}}$.

***Exercice n°6*** $f(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.

a) Comme $C_f$ passe par le point A ( 0, -3) alors f(0) = -3. Or f(0) = c d'où c = -3. Et donc $f(x) = -3x^3 + ax^2 + bx - 3$
Comme 1 est une racine de f(x) alors f(1) = 0, c'est à dire $-3 + a + b - 3 = 0$ .
Comme -3 est une racine de f(x) alors f(-3) =0, c'est à dire f(-3) = 81 +9a -3b -3 = 0.

Nous sommes donc amenés à résoudre le système : $\begin{cases} a+b=6 \\ 9a-3b=-78 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=6 \\ 9a-3b=-78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 3a-b=-26 \end{cases}$

On additionne membre à membre les deux équations et on obtient 4a = -20. D'où a = -5.
On remplace dans a+b = 6 d'où b = 11
Par conséquent, $f(x) = -3x^3 - 5x^2 + 11x - 3$ .
Vérification à l'aide de la calculatrice .

b) 1 et -3 sont racines de f(x) donc f est factorisable par x - 1 et x +3, soit f(x)= $(x-1)(x+3)(-3x+1)$

c) D'après la question précédente, l'équation f(x) = 0 admet trois solutions : 1, $\frac{1}{3}$ et -3.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(-3x+1) < 0$ .
On résout cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

| x | $-\infty$ | | -3 | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+3 | | – | 0 | + | \| | + | \| | + | |
| x-1 | | – | \| | – | | - | 0 | + | |
| -3x+1 | | + | \| | + | 0 | - | | - | |
| f(x) | | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – | |

Conclusion : f(x) < 0 a pour ensemble de solutions $\left]-3\,;\frac{1}{3}\right[ \cup \left]1;+\infty\right[$

***Exercice n°7** :*

| |
|---|
| *propriété :* dans un repère quelconque , toute droite d'équation de la forme ax+by+c=0, a et b étant deux réels dont l'un au moins est non nul a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$ . |

On en déduit qu'un vecteur directeur de D' est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ .

D et D' sont parallèles donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de D.

Une équation cartésienne de D est donc $2x+y+c=0$ où c est à trouver.
A(-2 ; 1) est un point de D donc $2\times(-2)+1+c=0$ ; Soit c = 3.

Conclusion : $\boxed{\text{une équation cartésienne de D est 2x+ y+3=0}}$

***Exercice 8 :*** on considère les droites D d'équation cartésienne $5x-4y+3 = 0$ et D' d'équation réduite $y = 1{,}25x-2$.

**1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D. $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1{,}25\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'.

On remarque que $\vec{u}' = 4\vec{u}$ donc les deux droites D et D' sont parallèles.

$5x-4y+3=0 \Leftrightarrow 4y = 5x+3 \Leftrightarrow y = 1{,}25x + \frac{3}{4}$ . D et D' n'ont pas la même ordonnée à l'origine donc elles ne sont pas confondues.

Conclusion : $\boxed{\text{D et D' ne se coupent pas}}$ .

**2.** $5\times1-4\times2+3=0$ donc les coordonnées de I vérifient bien l'équation de D. On en déduit que I appartient bien à D.
$\vec{u}''$ de coordonnées (3 ; *b*'').est un vecteur directeur de D'' donc une équation de D'' est b ''x -3y +c = 0.
A''(-5 ; 3) appartient à D'' donc -5b ''– 9 +c = 0
I (1 ; 2) appartient à D'' donc b''- 6 + c = 0

Si on soustrait les deux équations membres à membres on obtient : -6b'' – 3 = 0 . Conclusion : $\boxed{b'' = -\frac{1}{2}.}$