Exercice 1 :

a) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$**.**

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=3\\y-4=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que } \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB} \text{ sont } (4\ ,\ 5\ ).}$

b) M est le milieu de [AC] donc $x=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ et $y=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que M est le milieu de [AC] sont } (1\ ,\ -1).}$

c) 1ère méthode :

Les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}$ sont $\begin{pmatrix}2\times3+3\times(x-4)\\2\times1+3\times(y+5)\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}6+3x-12\\2+3y+15\end{pmatrix}$.

D'où $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-6+3x\\17+3y\end{pmatrix}$

$$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}-6+3x=0\\17+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=6\\3y=-17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{6}{3}=2\\y=-\dfrac{17}{3}\end{cases}$$

2ième méthode : (relation de Chasles) :

$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{CM}=-2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CM}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

D'où $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Finalement : $\begin{cases}x=4-\dfrac{2}{3}\times3\\y=-5-\dfrac{2}{3}\times1\end{cases}$ Soit $\begin{cases}x=4-2\\y=-5-\dfrac{2}{3}\end{cases}$. $\begin{cases}x=2\\y=-\dfrac{17}{3}\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que } 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0} \text{ sont } \left(2,-\dfrac{17}{3}\right)}$

d) ABCM est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}4-x\\-5-y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases}4-x=3\\-5-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-6\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que ABCM est un parallélogramme sont } (1,-6)}$

e) $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ Donc $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}(-3+3)\\y=4+\dfrac{1}{2}(-1-9)\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}\times0\\y=4+\dfrac{1}{2}\times(-10)\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que } \overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) \text{ sont } (1,-1)}$

f) M est l'image de C par la symétrie de centre B $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-3\\y-4=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=13\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées du point M tel que } \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB} \text{ sont } (-2\,;13)}$

Exercice 2 :

1°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ donc $BC=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ donc $CA=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

$AB^2+BC^2=5+20=25$ et $CA^2=25$ donc $AB^2+BC^2=CA^2$.

Conclusion : $\boxed{\text{d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B}}$.

2°) Le triangle ABC est rectangle en B donc le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypoténuse c'est à dire du coté [AC].

Les coordonnées du milieu Ω de [AC] sont : $x_\Omega=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1$ et $y_\Omega=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{1-2}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\Omega\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)}$. De plus $\boxed{\text{le rayon R est 2,5}}$: $\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 5=2{,}5$.

3°) E (3 ; 1). $\overrightarrow{\Omega E}\begin{pmatrix}2\\ \dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc $\Omega E=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}=2{,}5$.

Conclusion : $\boxed{\Omega E=2{,}5 \text{ donc E appartient au cercle}}$.

4°) Le centre du cercle est le milieu J de [BC]

Les coordonnées de J sont : $x_J=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$ et $y_J=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$.

Donc J (2 ; 0)

Le rayon du cercle est $\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

$\boxed{\text{Une équation du cercle est } (x-2)^2+y^2=5}$

5°) $x^2+y^2-4x-2y=4 \Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$

$\boxed{\text{C ' est le cercle de centre (2 ; 1) et de rayon 3}}$

Exercice n°3 : Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}\right)$ $\boxed{\text{les coordonnées de A sont (0 , 0), de I sont (1,0), de K sont (0,1)}}$.

1°) Voir figure.

2°) $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AI}$, c'est à dire $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AI}+0\overrightarrow{AK}$. $\boxed{\text{Les coordonnées de B sont (3,0).}}$

$\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AK}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AK}$. $\boxed{\text{Les coordonnées de C sont (0,5).}}$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{AI}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AI}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}+\dfrac{1}{3}\left(5\overrightarrow{AK}\right)=2\overrightarrow{AI}+\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AK}$ donc $\boxed{J\left(2;\dfrac{5}{3}\right)}$

$\overrightarrow{AL}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AJ}$ donc $\boxed{L\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{5}{7}\right)}$

3°) $\overrightarrow{AL}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AJ}$ donc A, J et L sont alignés donc <u>L ∈ (AJ)</u>

$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}-3\\ \dfrac{5}{7}-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}-\dfrac{21}{7}\\ \dfrac{5}{7}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}-\dfrac{21}{7}\\ \dfrac{5}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{15}{7}\\ \dfrac{5}{7}\end{pmatrix}=\dfrac{5}{7}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0-3\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BL}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{BK}$ donc B, K et L sont alignés donc <u>L ∈ (BK)</u>

$\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}-0\\ \dfrac{5}{7}-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}\\ -\dfrac{30}{7}\end{pmatrix}=\dfrac{6}{7}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}1-0\\0-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CI}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{CL}$ donc C, I et L sont alignés donc <u>L ∈ (CI)</u>

D'où L ∈ (AJ), L ∈ (BK) et L ∈ (CI).

Conclusion : $\boxed{\text{les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes en L}}$