Exercices : vecteurs (fiche n°2) . Correction.

Exercice n°1 :

> Rappel : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul
> $\vec{v}$ est **colinéaire à** $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (k est le coefficient de colinéarité).

a) $\vec{u} = \frac{5}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$ donc $2\vec{u} = 2\left(\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}\right) = 2\times\frac{5}{2}\vec{i} - 2\times\frac{3}{4}\vec{j} = 5\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$

$\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$. Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\vec{v} = 3(\vec{i} - 2\vec{j}) + \vec{i} + \vec{j} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{i} + \vec{j} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$; $6\vec{u} = 6\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{5}{6}\vec{j}\right) = 6\times\frac{2}{3}\vec{i} - 6\times\frac{5}{6}\vec{j} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$. Donc $6\vec{u} = \vec{v}$

Conclusion : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$.

c) $\vec{u} = \vec{i} + (\sqrt{2} - 1)\vec{j}$. Donc $(\sqrt{2} + 1)\vec{u} = (\sqrt{2} + 1)\left[\vec{i} + (\sqrt{2} - 1)\vec{j}\right]$

$(\sqrt{2} + 1)\vec{u} = (\sqrt{2} + 1)\vec{i} + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)\vec{j} = (\sqrt{2} + 1)\vec{i} + \left(\sqrt{2}^2 - 1^2\right)\vec{j} = (\sqrt{2} + 1)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} = (\sqrt{2} + 1)\vec{i} + \vec{j}$.

Donc $(\sqrt{2} + 1)\vec{u} = \vec{v}$. Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice n°2 :

Données : (1) ABC est un triangle

(2) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

(3) $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Démontrons que les droites (EF) et (BC) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

• $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

donc d'après (2) et (3), $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}\right) + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{8}{6}\overrightarrow{BC}$

Finalement $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires .

Conclusion : $\boxed{\text{les droites (EF) et (BC) sont parallèles}}$.

Exercice n°3 :

Données : (1) ABC est un triangle quelconque

(2) F est le milieu de [BC] c'est à dire $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

(4) $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Démontrons que les points E, F et K sont alignés, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires.

• D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

Donc d'après (2) et (3), $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$;

• D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$

Donc d'après (3) et (4), $\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$

Exercices : vecteurs (fiche n°2) . Correction.

• $\overrightarrow{EK} = 3\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{EF}$;

Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires .

Conclusion : $\boxed{\text{les points E,F et K sont alignés}}$.

Exercice n°4 :

Données : (1) ABC est un triangle quelconque.

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

(3) $\overrightarrow{CQ} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Démontrons que B est le milieu de [PQ], ce qui revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{BQ}$ sont égaux.

• D'une part : $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles)

donc d'après (2) $\overrightarrow{PB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{PB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

• D'autre part : $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$ (relation de Chasles)

Donc d'après (3) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

Donc $\overrightarrow{PB}$ = $\overrightarrow{BQ}$

Conclusion : $\boxed{\text{B est le milieu de [PQ].}}$

Exercice n°5 : Données : (1) ABCD est un parallélogramme

(2) $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

Démontrons que les droites (AE) et (BF) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

• D'une part : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ (relation de Chasles)

donc d'après (2) $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

• D'autre part : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

donc d'après (3) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$. Soit $\boxed{\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}}$

La comparaison des deux résultats obtenus nous amène à calculer $-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

$-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF} = -\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$

Finalement : $\boxed{-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Conclusion : $\boxed{\textbf{les droites (AE) et (BF) sont parallèles}}$**.**

Exercice 6

Données : (1) ABCD est un parallélogramme

(2) $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et (3) $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

Exercices : vecteurs (fiche n°2) . Correction.

2°) Pour déterminer les coordonnées du point E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, exprimons $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

• Exprimons $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ (relation de Chasles)

Donc d'après (2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}}$

• Exprimons $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$ (relation de Chasles)

Donc d'après (3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{AF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$

Conclusion : les coordonnées du point E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ sont (3 ; -2), et celle du point F sont $\left(-\frac{3}{2};1\right)$

3°) Pour démontrer que les points E, A et F sont alignés, démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

• $-2\overrightarrow{AF}=-2\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Donc $-2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Conclusion : **les points A, E et F sont alignés**.