Exercice n°1 : $\left(25x^2-20x+4\right)-(x-2)(5x-2)<(2-5x)(x-1)$

$(5x-2)^2-(x-2)(5x-2)-(2-5x)(x-1)<0$

$(5x-2)(5x-2)-(x-2)(5x-2)+(5x-2)(x-1)<0$

$(5x-2)[(5x-2)-(x-2)+(x-1)]<0$

$(5x-2)(5x-1)<0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
5 x - 2		-	|	-	0	+	
5x -1		–	0	+	|	+	
Produit		+	0	-	0	+	

Conclusion : $\boxed{S=\left]\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right[}$

Exercice n°2 : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc on étudie le signe de f – g sur $D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Pour tout réel x ≠ -2, f(x) – g(x) = $\frac{-2x^2-5x+3}{x+2}-(-2x-1)=\frac{-2x^2-5x+3}{x+2}+2x+1=\frac{-2x^2-5x+3}{x+2}+\frac{(2x+1)(x+2)}{(x+2)}$

f(x) – g(x) $=\frac{-2x^2-5x+3}{x+2}+\frac{2x^2+4x+x+2}{(x+2)}=\frac{5}{x+2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
5		+	|	+	
x+2		–	0	+	
f(x)-g(x)		–	||	+	

Conclusion :
- f(x) – g(x) > 0 sur $]-2;+\infty[$ donc si $x\in]-2;+\infty[$, C_f est au dessus de C_g .
- f(x) – g(x) = 0 n'a pas de solution donc C_f et C_g n'ont pas de points d'intersections.
- f(x) – g(x) < 0 sur $]-\infty;-2[$ donc si $x\in]-\infty;-2[$, C_f est au dessous de C_g

Exercice n°3 : $f(x)=\frac{-1}{1-3x}+4$

a) $f(x)$ existe si et seulement si 1 - 3x ≠ 0, c'est à dire si et seulement si $x\neq\frac{1}{3}$. Conclusion : $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) Il semble que la fonction f soit strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$ puis strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

c) Prouvons le : soient u et v deux réels de $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$ tels que u < v < $\frac{1}{3}$

On sait que la fonction affine $x\mapsto 1-3x$ est strictement décroissante sur ℝ donc 1 - 3u > 1 – 3v > 0.

On sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\frac{1}{1-3u}<\frac{1}{1-3v}$.

On multiplie par –1 : $\frac{-1}{1-3u}>\frac{-1}{1-3v}$ puis on ajoute 4 : $\frac{-1}{1-3u}+4>\frac{-1}{1-3v}+4$

Autrement dit $f(u)>f(v)$. Conclusion : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

Exercice n°4 : soit la fonction f définie par f(x) = $-2x^2-12x-17$.
1°) Il semble que C_f admet un maximum égal à 1 atteint pour x = -3.
Démontrons le :
f(-3) = -18 +36 –17 = 1.

Pour tout réel x, f(x)- 1 = $-2x^2-12x-17-1=-2x^2-12x-18=-2(x^2+6x+9)=-2(x+3)^2$.

Pour tout réel x , $(x+3)^2\geq 0$ donc $-2(x+3)^2\leq 0$ donc f(x) - 1≤ 0.
Donc pour tout réel x, f(x) ≤ **f(-3) avec f(-3) = 1.**
Conclusion : f admet en -3 un maximum égal à 1.
2°) Il semble que la courbe C_f admet la droite d'équation x = -3 pour axe de symétrie ; démontrons le.
Pour tout réel h de ℝ, -3+h et –3-h appartiennent à ℝ
$f(-3+h)=-2(-3+h)^2-12(-3+h)-17=-2(9-6h+h^2)+36-12h-17=-18+12h-2h^2+36-12h-17=1-2h^2$
$f(-3-h)=-2(-3-h)^2-12(-3-h)-17=-2(9+6h+h^2)+36+12h-17=-18-12h-2h^2+36+12h-17=1-2h^2$
Pour tout réel h , f(-3+h)=f(–3-h).
Conclusion : la droite d'équation x = -3 est axe de symétrie pour C_f