TD N °2 : GENERALITES FONCTIONS. CORRECTION (incomplète).

II) Ce qu'il faut savoir pour déterminer des domaines de définitions.

Exercice n°2 :

5°) QCM

1. f(x) existe si et seulement si $4 - 2x \geq 0$.

$4 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Conclusion : $D_f = \left]-\infty\,;2\right]$ (réponse c)

III) Justifier des symétries observées sur une courbe.

Exercice n°3 :

1°) f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Pour tout réel h tel que –1+h appartienne à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, c 'est à dire pour tout réel h non nul , -1-h appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f(-1+h) = \frac{(-1+h)^2+3}{-1+h+1} = \frac{1-2h+h^2+3}{-1+h+1} = \frac{4-2h+h^2}{h}$$

$$f(-1-h) = \frac{(-1-h)^2+3}{-1-h+1}.$$

Or $(-1-h)^2 = [-(1+h)]^2 = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$ donc $f(-1-h) = \dfrac{1+2h+h^2+3}{-1-h+1} = \dfrac{4+2h+h^2}{-h} = -\dfrac{4+2h+h^2}{h}$

f(-1+h)+ f(-1-h) $= \dfrac{4-2h+h^2}{h} - \dfrac{4+2h+h^2}{h} = \dfrac{-4h}{h} = -4$. On en déduit que $\dfrac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2} = -2$

Conclusion : $\boxed{\text{la courbe représentative de f admet le point I (-1 ; -2) pour centre de symétrie}}$.

2°) g est la fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{-2x^2+4x-1}{(x-1)^2}$.

Pour tout réel h tel que 1+h appartienne à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, c'est pour tout réel h non nul, 1-h appartient à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$g(1+h) = \frac{-2(1+h)^2+4(1+h)-1}{(1+h-1)^2} = \frac{-2(1+2h+h^2)+4+4h-1}{h^2} = \frac{-2-4h-2h^2+4+4h-1}{h^2} = \frac{1-2h^2}{h^2}$$

$$g(1-h) = \frac{-2(1-h)^2+4(1-h)-1}{(1-h-1)^2} = \frac{-2(1-2h+h^2)+4-4h-1}{h^2} = \frac{-2+4h-2h^2+4-4h-1}{h^2} = \frac{1-2h^2}{h^2}$$

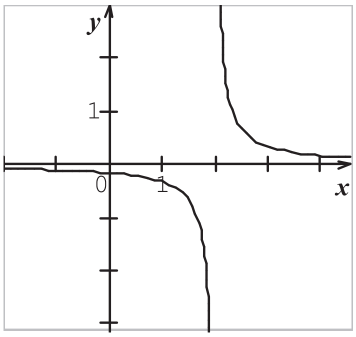
On a donc $g(1+h) = g(1-h)$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe C représentative de g}}$.

IV) Ce qu'il faut savoir pour déterminer le sens de variation d'une fonction :

Exercice n°4 **: connaître le sens de variations des fonctions usuelles et connaître les règles de calculs sur les inégalités.**

1°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$.



a) le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) Il semble que la fonction f soit strictement décroissante sur $\left]-\infty,2\right[$ puis strictement décroissante sur $\left]2\,;+\infty\right[$

c) Soient u et v deux réels de $\left]-\infty,2\right[$ tels que u < v <2

On sait que la fonction affine $x \mapsto 3x-6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc 3u – 6 < 3v – 6 < 0.

On sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right[$ donc $\dfrac{1}{3u-6} > \dfrac{1}{3v-6}$.

Autrement dit f(u) > f(v). Conclusion : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,2\right[$

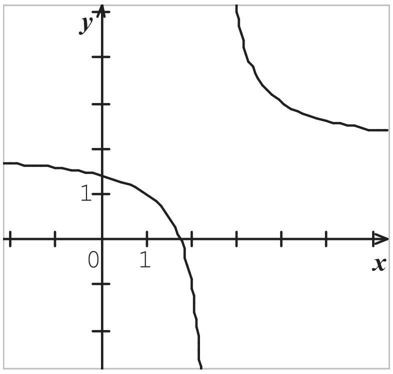
2°) $f(x) = \dfrac{-3}{5-2x} + 2$,

a) le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

b) Il semble que la fonction f soit strictement décroissante sur $\left]-\infty,\dfrac{5}{2}\right[$ puis strictement décroissante sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$

TD N °2 : GENERALITES FONCTIONS. CORRECTION (incomplète).

c) Soient u et v deux réels de $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$ tels que $u < v < \frac{5}{2}$



On sait que la fonction affine $x \mapsto 5-2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $5 - 2u > 5 - 2v > 0$.
On sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\frac{1}{5-2u} < \frac{1}{5-2v}$.

On multiplie par -3 : $\frac{-3}{5-2u} > \frac{-3}{5-2v}$ puis on ajoute 2 $\frac{-3}{5-2u}+2 > \frac{-3}{5-2v}+2$

Autrement dit $f(u) > f(v)$.

Conclusion : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

3°) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{5-2x}} + 2$.

a) La fonction f est définie pour $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.

Son ensemble de définition est donc $D_f = \left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$.

b) En traçant la courbe représentant f sur une calculatrice, il semble que f soit strictement décroissante sur D_f.

c) Prouvons le :

Soient u et v des réels quelconques de $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$ tels que : $u < v < \frac{5}{2}$

La fonction $x \mapsto 5 - 2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient directeur négatif) donc $5 - 2u > 5 - 2v > 0$

Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc : $\sqrt{5-2u} > \sqrt{5-2v} > 0$

Les réels $\sqrt{5-2u}$ et $\sqrt{5-2v}$ sont strictement positifs.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc : $\frac{1}{\sqrt{5-2u}} < \frac{1}{\sqrt{5-2v}}$

En multipliant par -3, qui est un nombre négatif : $\frac{-3}{\sqrt{5-2u}} > \frac{-3}{\sqrt{5-2v}}$

Et enfin en ajoutant 2 : $\frac{-3}{\sqrt{5-2u}} + 2 > \frac{-3}{\sqrt{5-2v}} + 2$

C'est-à-dire : $f(u) > f(v)$

Bilan : on a montré que, pour tous réels u et v de $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$: $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

La fonction f est donc bien strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$.

Exercice n°5 :

Soit u et v deux réels de $[2,+\infty[$ tels que $2 \le u < v$

la fonction $f : x \mapsto 4-2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(2) \ge f(u) > f(v)$, c'est à dire $0 \ge 4 - 2u > 4 - 2v$.

la fonction carrée est strictement décroissante $]-\infty,0]$ donc $0 \le (4-2u)^2 < (4-2v)^2$.

Conclusion : la fonction : $x \mapsto (4-2x)^2$ est croissante sur $[2,+\infty[$

Soit u et v deux réels de $]-\infty,2]$ tels que $u < v \le 2$

la fonction $f : x \mapsto 4-2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $4-2u > 4-2v \ge 0$.

la fonction carrée est strictement croissante $[0,+\infty[$ donc $(4-2u)^2 > (4-2v)^2 \ge 0$.

Conclusion : la fonction : $x \mapsto (4-2x)^2$ est décroissante sur $]-\infty,2]$