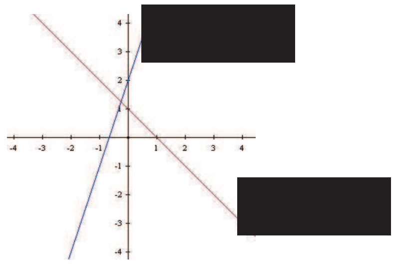
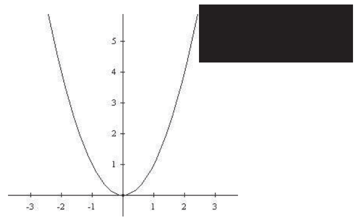
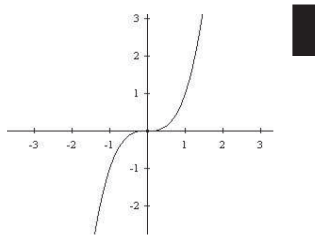
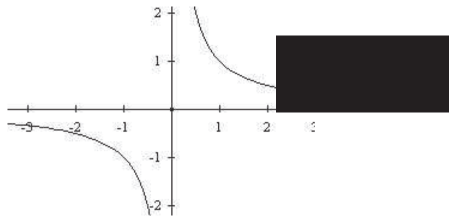
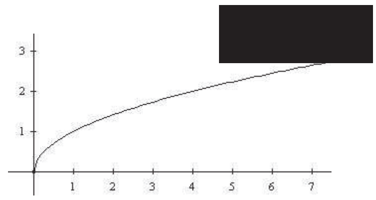
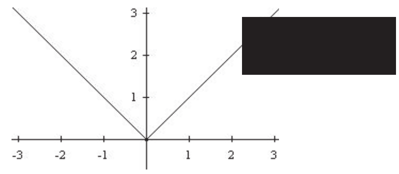
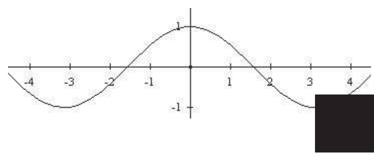
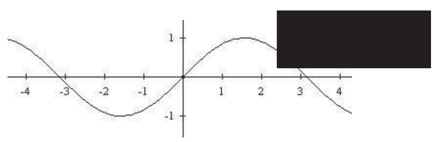
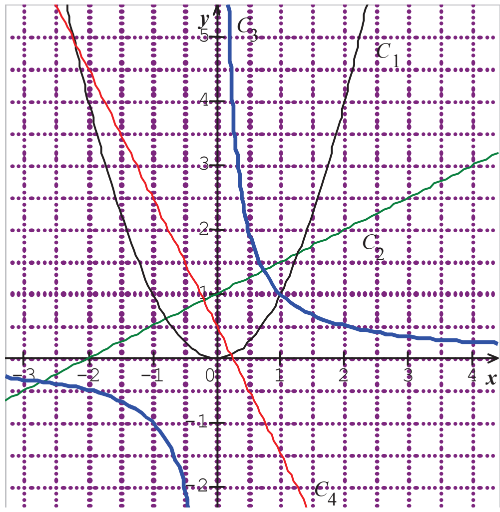
CHAPITRE N° 1 : FONCTIONS GÉNÉRALITÉS.

I) Panorama des fonctions de référence.

Fonctions	Ensemble de définition, variations …	Représentations graphiques
$f : x \longmapsto ax + b$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ Si $a > 0$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ▪ Si $a < 0$ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ *exercices 1 et 4 page 468*	 [redacted]
$f : x \longmapsto x^2$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ ▪ La courbe représentative de f est **une parabole** de sommet O. *exercices 7 et 13 page 468 / 469*	 [redacted]
$f : x \longmapsto x^3$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	 [redacted]
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	▪ $D_f = \mathbb{R}^*$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ ▪ La courbe représentative de f est **une hyperbole** de sommet O. *exercice 24 page 34*	 [redacted]
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	▪ $D_f = [0 ; +\infty[$ ▪ f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$	 [redacted]
$f : x \longmapsto \lvert x \rvert$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ *exercice 32 page 35*	 [redacted]
$f : x \longmapsto \cos x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est périodique de période 2π $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	 [redacted]
$f : x \longmapsto \sin x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est périodique de période 2π $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	 [redacted]

CHAPITRE N° 1 : FONCTIONS GÉNÉRALITÉS.

Exercice n°1 : On a tracé les courbe représentatives des fonctions f, g, h et i définies par :
$f(x)=\frac{x+2}{2}$; $g(x)=x^2$; $h(x)=\frac{1}{x}$; $i(x)=-2x+\frac{1}{2}$



1°) Associer chaque fonction et sa courbe représentative.

2°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x^2=\frac{x+2}{2}$ et encadrer chacune des solutions par deux entiers consécutifs.

3°) Utiliser ce graphique pour déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\frac{1}{x}<x^2$.

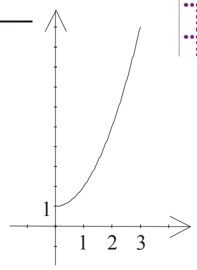
Pour s'entraîner : exercice n°30 page 35, exercice n°1 p 465.

II) Domaine de définition d'une fonction :

1°) Définition :

Soit D une partie de ℝ. **Définir une fonction** f sur D, c'est **associer,** à tout réel *x* de D **un réel et un seul** noté f(*x*).

Exemple : soit la fonction f définie sur [0 ; 3] par $f(x)=x^2+1$.
Ici, la représentation graphique de f ne sera qu'un morceau de parabole :
On note encore : $f : [0\ ;\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+1$



Convention : lorsque l'ensemble de définition n'est pas indiqué dans l'énoncé d'un problème, on convient que cet ensemble est l'ensemble de tous les nombres x pour lesquels on peut calculer f(x).

2°) Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction .

Exercice n°2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de f
puis vérifier en construisant la courbe représentative de f sur un ordinateur ou une calculatrice.

♦ Premier cas : f(x) s'écrit avec un dénominateur. a) f(x) = $\frac{2x-1}{x-2}$.

♦ Deuxième cas : f(x) s'écrit à l'aide d'une racine carrée. b) f(x) = $\sqrt{3-x}$

♦ Autres cas : c) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, *pour s'entraîner : voir TD n°2.*

Mémo : $\sqrt{\text{TRUC}}$ existe ssi TRUC ≥ 0 et $\frac{1}{\text{MACHIN}}$ existe ssi MACHIN ≠ 0

III) Eléments de symétries d'une courbe :

1°) Domaines symétriques par rapport à zéro

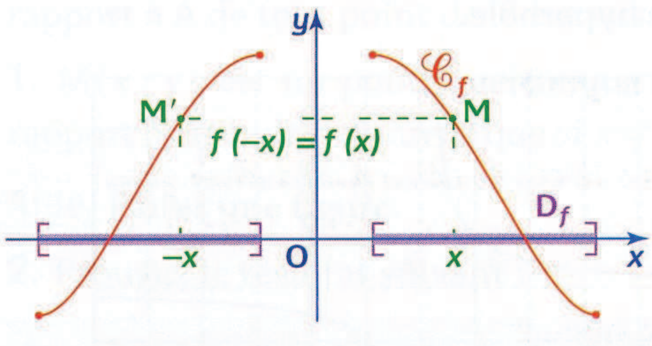
Définition : **un domaine D est symétrique par rapport à zéro si pour tout x de D, - x appartient à D**.

Exercice n°3 **:** parmi les ensembles suivants, souligner ceux qui sont symétriques par rapport à zéro.
I =[-4 ; 4] J =[-2 ; 1] K =] -6 ; 6] L =[0; +∞[M = [3 ; 4] N = [-5 ; 5[0=] -∞ ; -1] ∪ [1 ; +∞ [

2°) Fonctions paires

a) Définition : **Une fonction f, définie sur D_f est paire si pour tout x de D_f, on a : -x ∈ D_f et f(x) = f(-x).**

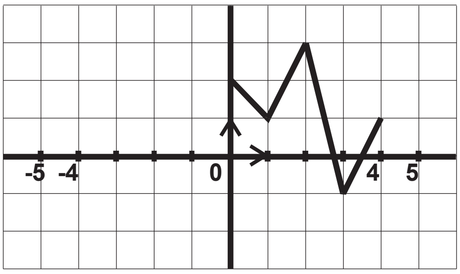
Exemples : la fonction carrée, la fonction valeur absolue et la fonction cosinus.



b) Propriété :

La représentation graphique d'une fonction **paire**, dans un repère orthogonal, est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Exercice n°4 : voici un morceau de la représentation graphique d'une fonction paire f définie sur [-4 ; 4]



- Compléter la représentation graphique de f.
- Compléter

f(1) = f(-1) = ………………

f(2) = f(-2) = ………………..

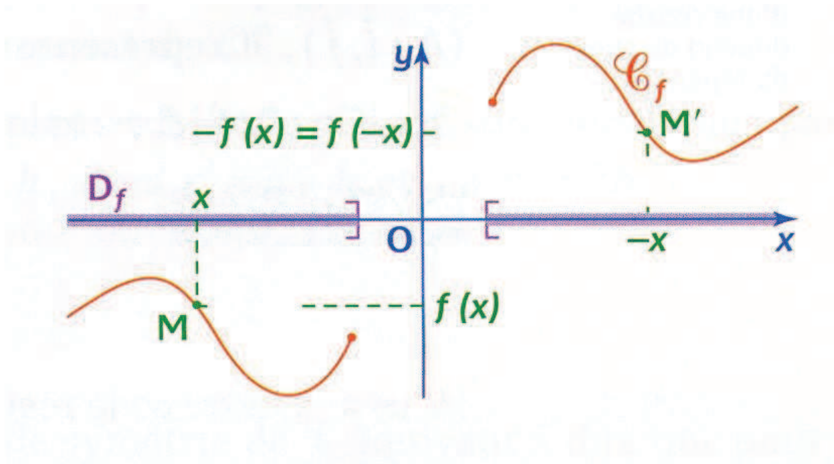
f(3,5) = f(-3,5) = ………………...

3°) Fonction impaires :

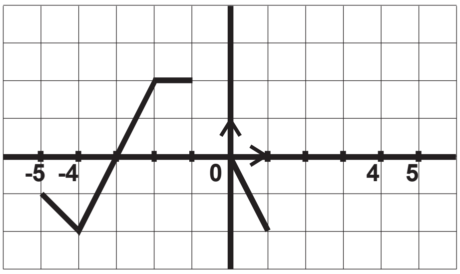
a) Définition : **Une fonction f, définie sur D_f est impaire si pour tout x de D_f, on a : $-x \in D_f$ et f(-x) = -f(x)**

Exemples : la fonction cube, la fonction inverse et la fonction sinus sont des fonctions impaires.

b) Propriété : la représentation graphique d'une fonction **impaire**, dans un repère orthogonal, est **symétrique par rapport à l'origine**



Exercice n°5 : voici un morceau de la représentation graphique d'une fonction impaire f définie sur [-5 ; 5]



- Compléter la représentation graphique de f.
- Compléter :

f(-2) = - f(2) = ……..

f(4) = - f(-4) = …….

f(0) = ……………

4°) Etude de la parité d'une fonction

Méthode :

Pour étudier la parité d'une fonction
a) On regarde si le domaine de définition est symétrique par rapport à O.
b) Si oui, on calcule f(-x) : si f(-x) = f(x) alors f est paire, si f(-x) = -f(x) alors f est impaire ; Si non, f n'est ni paire, ni impaire.

Exercice n°6 : les fonctions suivantes sont-elles paires ? ou impaires ? ou ni paires ni impaires ?

a) f définie sur ℝ par : $f(x) = x^2 - 5$ b) g définie sur ℝ par : $g(x) = x^3 - x + 1$ c) h définie sur ℝ par : $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Méthode : Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire , ni impaire, un contre exemple suffit.

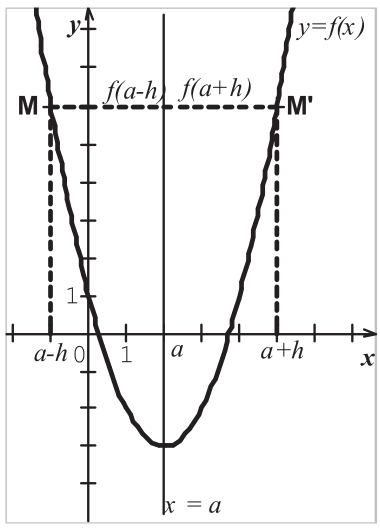
Pour s'entraîner : *exercices n°5 à 8 p 32 et 11 et 12 p 33.*

5°) Justifier une symétrie d'une courbe

a) Axe de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur une partie D de ℝ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. Soit a un réel fixé.
Si, pour tout réel h tel que a+h appartient à D, a-h appartient à D et **f(a – h) = f (a + h)**, alors C_f est symétrique par rapport à la droite D d'équation x = a. On dit que la droite d'équation x = a est un **axe de symétrie** de la courbe C_f.



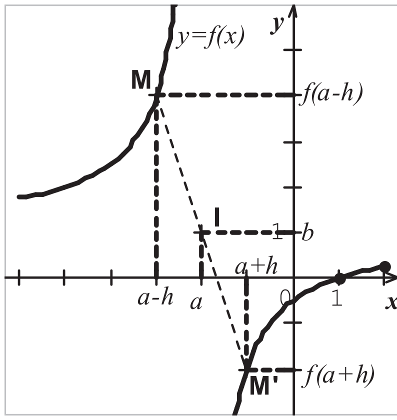
Remarque : lorsque a = 0, on retrouve le cas particulier d'une fonction paire.

Exercice n°7 : Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = x^2 – 2x - 1$.
Visualiser sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de C_g et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie.

b) Centre de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur une partie D de ℝ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit a et b deux réels fixés.
Si, pour tout réel h tel que a+h appartient à D, a-h appartient à D et $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}=b$,
alors C_f est symétrique par rapport au point I de coordonnées (a ; b) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On dit que I est un **centre de symétrie** de la courbe C_f



Remarque : lorsque a = 0, on retrouve le cas particulier d'une fonction impaire.

Exercice n°8 : soit f la fonction définie sur ℝ \ {-1} par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.
Visualiser sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de C_f et démontrer qu'elle admet un centre de symétrie.

Intérêt des symétries : une symétrie connue permet d'étudier une fonction sur un demi-intervalle.

IV) Sens de variation d'une fonction :

1°) Définitions :

Soit *I* un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non)
Soit f une fonction définie au moins sur *I*. On dit que :

- **f est <u>croissante sur *I*</u> signifie que : pour tous réels *u* et *v* de *I* , si *u* < *v* alors $f(u) \leq f(v)$**
- **f est <u>strictement croissante sur *I*</u> signifie que : pour tous réels *u* et *v* de *I* , si *u* < *v* alors $f(u) < f(v)$**
- **f est <u>décroissante sur *I*</u> signifie que : pour tous réels *u* et *v* de *I, si* *u* < *v* alors $f(u) \geq f(v)$**
- **f est <u>strictement décroissante sur *I*</u> signifie que : pour tous réels *u* et *v* de *I*, si *u* < *v* alors $f(u) > f(v)$**
- **f est <u>monotone sur *I*</u> signifie que f est croissante sur *I* ou décroissante sur *I*.**
- **f est <u>strictement monotone sur *I*</u> signifie que f est strictement croissante sur *I* ou strictement décroissante sur *I*.**

<u>Remarques</u> :
- Ces notions ne sont valables que sur un intervalle
- On dit parfois que f est croissante si elle conserve les inégalités et que f est décroissante si elle renverse les inégalités.
- Le sens de variation des fonctions suivantes est à connaître parfaitement : $x \mapsto ax+b \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^3 \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \mapsto \sqrt{x}$

2°) Tableau de variation

a) Définition :

Etudier le sens de variation d'une fonction consiste à déterminer les intervalles de l'ensemble de définition sur lesquels la fonction est strictement croissante ou décroissante. Les résultats peuvent être consignés dans un tableau appelé **tableau de variation.**

b) Savoir exploiter un tableau de variations

Exercice n°9*:* soit u une fonction dont le tableau de variation sur ℝ est :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
u(x)		↗	1	↘	-2	↗	

Les informations contenues dans ce tableau permettent-elles de comparer :
- u(-3) et u(-2) ? • u(0) et u(1) ? • u(0) et u(4) ?

Pour s'entraîner : exercices n°1 et 2 page 32 et n°72 p 40

3°) Savoir utiliser le sens de variation des fonctions usuelles pour manipuler des inégalités :

Exercice n°10 *:* Dans chacun des cas suivants, donner le meilleur encadrement possible de f(x)

a) $f(x) = x^2$ et $-1 < x \leq 3$. b) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $2 < x \leq 3$. *Pour s'entraîner : exercices n°19, 20, 25 page 34.*

4°) Savoir utiliser le sens de variation des fonctions usuelles pour déterminer le sens de variation d'une fonction
Exercice n°11*:* soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = -2x^2+8x-4$.
a) En utilisant la calculatrice pour obtenir la représentation graphique de f, quelle conjecture peut-on formuler concernant le sens de variation de f ?
b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -2(x-2)^2+4$.
c) En utilisant les variations des fonctions de référence, déterminer les variations de f sur $[2 ; +\infty[$ puis sur $]-\infty ; 2]$
Pour s'entraîner : exercices n° 21, 26 page 34.

5°) Savoir utiliser les règles de calcul algébrique pour déterminer le sens de variation d'une fonction

Exercice n°12 : étudier le sens de variation de la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$[par : $f(x) = x^4$.

On verra, lors du chapitre sur la dérivation, une autre méthode pour étudier le sens de variation d'une fonction.

6°) Extremum d'une fonction.

a) Définition :

f admet un maximum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
f admet un minimum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.

Pour s'entraîner : TD2 page 29.

b) Savoir justifier l'existence d'un extremum.

Exercice n°13 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$.
♦ A l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de f.
♦ Démontrer par le calcul que 4 est le minimum de f sur ℝ. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
Pour s'entraîner : exercices n°38 page 34.

V) Egalité de fonctions :

1°) Définition :

Deux fonctions f et g, d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g sont égales quand :
* **$D_f = D_g$**
* **Pour tout x de D_f, $f(x) = g(x)$**

2°) Montrer l'égalité de deux fonctions :

Exercice n°14 : a) Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{(x-1)^2}$ et $g(x) = 3 + \dfrac{2}{(x-1)}$ sont égales.

b) Vrai ou faux ? les fonctions f et g définies sur ℝ par : $f(x) = 3(x-1)^2 - 2$ et $g(y) = 3y^2 - 6y + 1$ sont égales.
Pour s'entraîner : exercices n°43 et 44 page 37.

Exercice n°15 : f et g sont deux fonctions, préciser dans les cas suivants si f = g.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{x-3}$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2}$ et $g : x \mapsto x^2 - 4$

VI) Comparaison de fonctions :

Pour étudier les positions relatives de deux courbes C_f et C_g représentant respectivement des fonctions f et g dans un repère du plan (et donc comparer les deux fonctions), on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $D = D_f \cap D_g$

- Si $f(x) - g(x) > 0$ pour tout réel x appartenant à I, alors C_f est strictement au-dessus de C_g sur I
- Si $f(x) - g(x) < 0$ pour tout réel x appartenant à I, alors C_f est strictement au-dessous de C_g sur I
- Les solutions de $f(x) - g(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g

Exercice n°16 *:* soient f la fonction définie sur ℝ\ { -2} par $f(x) = \dfrac{-2x^2-5x+3}{x+2}$ et g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = -2x - 1$.
Quelle est la position relative des courbes représentant, dans un repère, les fonctions f et g ?