

Exercice n°1

1) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 2x + 3 = 0$.

Soit Δ le discriminant de $g(x)$: $\Delta = (-2)^2 - 4(-4)(3) = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13$.

$\Delta > 0$ donc $g(x) = 0$ a deux solutions x' et x'' :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4 \times 13}}{-8} = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{-8} = \frac{2(1 - \sqrt{13})}{-2 \times 4} = \frac{1 - \sqrt{13}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{-8} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$$

Conclusion : $g(x) = 0$ pour $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$ ou $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$

2)

Théorème 1 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ peut se factoriser et $P(x) = a(x - x')(x - x'')$ où x' et x'' sont les racines de $P(x)$.

Conclusion : $g(x) = -4 \left(x - \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} \right)$

3)

Théorème 2 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur" des racines et du signe de $-a$ "à l'intérieur".

Ici $a = -4$ donc $g(x) > 0$ pour x appartenant à $\left] \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} \right[$

Exercice n°2 :

1) a) $P(1) = -14 \times 1^3 + 33 \times 1^2 - 16 \times 1 - 3 = -14 + 33 - 16 - 3 = 0$.

b) $P(x) = (x - a)Q(x)$.

$P(x)$ est degré 3 donc $Q(x)$ est de degré 2 et $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Par identification : $a = -14$ et $c = 3$

Donc $P(x) = (x - 1)(-14x^2 + bx + 3)$ où b est un réel à déterminer.

Développons $(x - 1)(-14x^2 + bx + 3)$:

$$(x - 1)(-14x^2 + bx + 3) = -14x^3 + bx^2 + 3x + 14x^2 - bx - 3 = -14x^3 + (b + 14)x^2 + (3 - b)x - 3.$$

D'après le théorème d'identification : $b + 14 = 33$ et $3 - b = -16$ donc $b = 19$

Conclusion : $P(x) = (x - 1)(-14x^2 + 19x + 3)$ et $Q(x) = -14x^2 + 19x + 3$.

2) a) Soit Δ le discriminant de $-14x^2 + 19x + 3$: $\Delta = (19)^2 - 4(-14)(3) = 361 + 168 = 529$

$\Delta > 0$ donc $-14x^2 + 19x + 3$ a deux racines x' et x'' : $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - 23}{-28} = 15 = \frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + 23}{-28} = \frac{+4}{-28} = -\frac{1}{7}$

Finalement $-14x^2 + 19x + 3 = -14(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{7})$. D'où $P(x) = -14(x - 1)(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{7})$

Donc $P(x) = 0 \Leftrightarrow -14(x - 1)(x + \frac{1}{7})(x - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{7}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Conclusion : $P(x) = 0$ a trois solutions $1, \frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{7}$.

b) On utilise le théorème 2 ci dessus pour le signe de $-14x^2 + 19x + 3$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{7}$	1	1,5	$+\infty$		
x-1	-	-	0	+	+		
$-14x^2+19x+3$	-	0	+	+	0	-	
P(x)	+	0	-	0	+	0	-

c) $P(x) > 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty; -\frac{1}{7}[\cup]1; 1,5[$

Exercice n°3 : a) $-\frac{1}{7}x^2 + 2x - 7 < 0$.

Soit Δ le discriminant de $-\frac{1}{7}x^2 + 2x - 7$: $\Delta = (2)^2 - 4(-\frac{1}{7})(-7) = 4 - 4 = 0$.

$$\Delta = 0 \text{ donc } -\frac{1}{7}x^2 + 2x - 7 \text{ a une racine double } x_0 : x_0 = \frac{-2}{-\frac{1}{7}} = \frac{2}{\frac{1}{7}} = 2 \times \frac{7}{1} = 14$$

Théorème 4 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Si $\Delta = 0$: $P(x)$ est du signe de a pour x réel différent de $-\frac{b}{2a}$.

Donc $-\frac{1}{7}x^2 + 2x - 7$ est strictement négatif pour $x \neq 14$.

Donc l'inéquation $-\frac{1}{7}x^2 + 2x - 7 < 0$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R} - \{14\}$.

Interprétation graphique : La parabole est tournée vers le bas, son sommet est sur l'axe des abscisses.

b) $3x^2 - 2x + 1 > 0$. Soit Δ le discriminant de $3x^2 - 2x + 1$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$

Théorème 5 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est du signe de a pour x réel.

Donc $3x^2 - 2x + 1 > 0$ pour tout x réel (puisque $a = 3$).

Donc l'inéquation $3x^2 - 2x + 1 > 0$ a pour ensemble de solution $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique : La parabole est tournée vers le haut, elle est au dessus de l'axe des abscisses.

Exercice n°4 : l'inéquation $\frac{-2x+6}{-15x^2+x+2} \geq 0$ peut se résoudre à l'aide d'un tableau de signes.

Soit Δ le discriminant de $-15x^2 + x + 2$: $\Delta = (1)^2 - 4 \times (-15) \times 2 = 1 + 120 = 121$

$\Delta > 0$ donc $-15x^2 + x + 2$ a deux racines x' et x'' : $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 11}{-30} = \frac{2}{5}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 11}{-30} = -\frac{10}{30} = -\frac{1}{3}$.

$-\frac{1}{3}$ et $0,4$ sont deux valeurs interdites.

On utilise le théorème 2 ci dessus pour le signe de $-15x^2 + x + 2 < 0$

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Tableau

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$0,4$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+	+	+	0	-
$-15x^2 + x + 2$	-	0	+	0	-
quotient	-	+	-	0	+

Conclusion : $\frac{-2x+6}{-15x^2+x+2} \geq 0$ sur $]-\frac{1}{3}; 0,4[\cup [3, +\infty[$

Exercice n°5 :

Figure 1 : les branches de la parabole sont tournées vers le bas donc $a < 0$.

La courbe n'a pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Donc $\Delta < 0$.

Figure 2 : les branches de la parabole sont tournées vers le haut donc $a > 0$.

La courbe a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

Donc $\Delta > 0$.

Exercice n°6 :

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad (3x+2)(x-5)^3 + (x^2-10x+25)(3x+2) &= (6x+4)(x-5)^2 \Leftrightarrow (3x+2)(x-5)^3 + (x-5)^2(3x+2) - 2(3x+2)(x-5)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x+2)(x-5)^2[(x-5)+1-2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x+2)(x-5)^2(x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 5 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

$$2^{\circ} \quad x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 2X - 3 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant de l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$\Delta > 0$ donc l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $X_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

On en déduit que $x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ ou $x^2 = 3$.

$-1 < 0$ et pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$3 > 0$ donc $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

Conclusion : l'équation $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ a deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

3) $\sqrt{x-1} = -2x + 5$.

Pour que l'équation soit définie, il faut : $x - 1 \geq 0$. C'est à dire $x \geq 1$.

Pour tout réel x de $[1, +\infty[$:

$$\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Leftrightarrow (x-1) = (-2x+5)^2 \text{ et } -2x+5 \geq 0$$

$$\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Leftrightarrow (x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \text{ et } -2x \geq -5$$

$$\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Leftrightarrow (4x^2 - 21x + 26 = 0 \text{ et } x \leq \frac{5}{2}).$$

Soit Δ le discriminant de $4x^2 - 21x + 26$: $\Delta = (-21)^2 - 4 \times 4 \times 26 = 25$.

$$\Delta > 0 \text{ donc } \Leftrightarrow 4x^2 - 21x + 24 = 0 \text{ a deux solutions : } x' = \frac{21-5}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ et } x'' = \frac{21+5}{8} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4} = 3,25.$$

3,25 n'est pas inférieur à $\frac{5}{2}$ donc 3,25 n'est pas solution.

$2 > 1$ et $2 < 2,5$ donc 2 est solution.

Conclusion : l'équation $\sqrt{x-1} = -2x + 5$ a une solution 2.

$$4) 1 - \frac{3}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2-1} - \frac{3}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$x^2 - 4$ est du signe de $a=1$ c'est à dire positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

$x^2 - 1$ est du signe de $a=1$ c'est à dire positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 4$		+	0	-	-	0	+	
$x^2 - 1$		+	+	0	-	0	+	
$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$		+	0	-	+	-	0	+

$$S =]-\infty; -2[\cup]-1; 1[\cup]2; +\infty[$$

5) $\frac{x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 4x - 1} > 0$.

Soit Δ_1 le discriminant de $x^2 + 5x + 4$: $\Delta_1 = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$

$$\Delta_1 > 0 \text{ donc } x^2 + 5x + 4 \text{ a deux racines } x' \text{ et } x'' : x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{2} = -4 \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{2} = -1.$$

Soit Δ_2 le discriminant de $3x^2 + 4x - 1$: $\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28$

$\Delta_2 > 0$ donc $3x^2 + 4x - 1$ a deux racines x' et x'' :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}.$$

$$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \approx -1,54 \text{ et } \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,21 \text{ sont deux valeurs interdites.}$$

x	$-\infty$	-4	$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$	-1	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$		
x^2+5x+4		+	0	-	0	-	+	
$3x^2+4x-1$		+	+	0	-	+	0	+
$\frac{x^2+5x+4}{3x^2+4x-1}$		+	0	-	+	0	-	+

$$S =]-\infty; -4[\cup \left] -\frac{2 + \sqrt{7}}{3}; -1 \right[\cup \left] \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}; +\infty \right[$$

Exercice n7 :

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x(8 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 8x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 64 - 8 = 56 = 4 \times 14.$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 8x + 2 = 0$ a deux solutions :

$$x' = \frac{8 - 2\sqrt{14}}{2} = 4 - \sqrt{14} \text{ et } x'' = \frac{8 + 2\sqrt{14}}{2} = 4 + \sqrt{14}.$$

Le système a deux couples de solutions $(4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14})$ et $(4 + \sqrt{14}; 4 - \sqrt{14})$