Correction du DM 3.

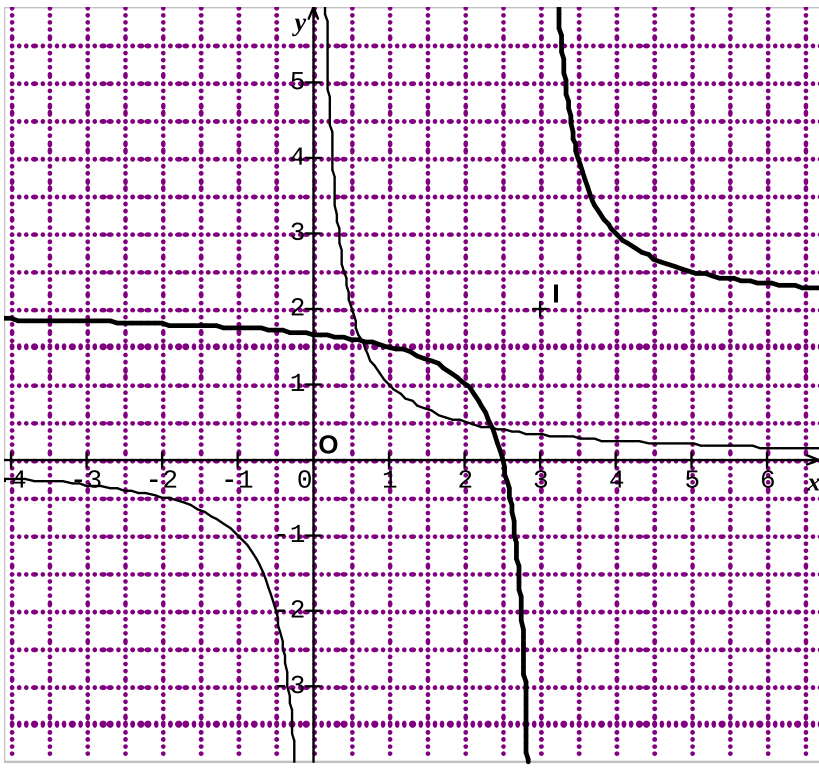
Exercice 1 : Un peu de logique :

1) La fonction carré est strictement croissante sur [0 , +∞ [donc à fortiori sur [5 , +∞ [
Conclusion : la proposition : "Si $x \geq 5$ alors $x^2 \geq 25$" est vraie.
2) On choisit x = -3 : $-3 > -5$ et $(-3)^2 < 5^2$
Conclusion : la proposition : " Si $x \geq -5$ alors $x^2 \geq 25$" est fausse.
3) On choisit x = -6 : $-6 < -5$ et $(-6)^2 > (-5)^2$
Conclusion : la proposition : "Si $x \leq 5$ alors $x^2 \leq 25$" est fausse.
4) La fonction carré est strictement décroissante sur] -∞ ,0] donc à fortiori sur] -∞ ,-5]
Conclusion : la proposition : "Si $x \leq -5$ alors $x^2 \geq 25$" est vraie.
5) La fonction carré est strictement décroissante sur] -∞ ,0] donc à fortiori sur [-5 , -1]
Conclusion : la proposition "Si $-5 \leq x \leq -1$, alors $1 \leq x^2 \leq 25$" est vraie.
6) On choisit x = 0 : $-5 \leq 0 \leq 1$ et $0^2 < 1$
Conclusion : la proposition "Si $-5 \leq x \leq 1$, alors $1 \leq x^2 \leq 25$" est fausse.

Exercice n°2 :
Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 6x+13$.
1°) $(x-3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 9 + 4 = x^2 - 6x + 13 = f(x)$.
2°) Pour tout réel x, $(x-3)^2 \geq 0$.
Donc pour tout réel x, $(x-3)^2 + 4 \geq 4$.
Or f(3) = 4
Donc pour tout réel x, $f(x) \geq f(3)$ avec f(3) = 4.
Conclusion : f admet un minimum sur ℝ, égal à 4 atteint pour x = 3.

Exercice n°3 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$. C_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1°) L'ensemble D de définition de f est D = ℝ - { 3 }.
2°) Pour tout réel x appartenant à D, $2 - \frac{1}{3-x} = \frac{2(3-x)}{3-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{-2x+5}{3-x} = \frac{2x-5}{x-3} = f(x)$.
3°) Soit u et v deux réels de]- ∞ ; 3[tels que u< v **<3**
La fonction $x \mapsto 3-x$ est strictement décroissante sur ℝ donc 3 –u >3 –v **> 0**
La fonction inverse est strictement décroissante sur] 0 , +∞ [
donc $\frac{1}{3-u} < \frac{1}{3-v}$.
On multiplie par –1 donc $-\frac{1}{3-u} > -\frac{1}{3-v}$.
On ajoute 2 donc $2 - \frac{1}{3-u} > 2 - \frac{1}{3-v}$
C'est à dire f(u) > f(v).
Conclusion : f est strictement décroissante sur]-∞ ; 3[
4°) f(x) = $2 - \frac{1}{3-x} = 2 + \frac{1}{x-3}$ =h(x - 3) +2
où h est la fonction inverse.
Conclusion : la courbe C_f est l'image de l'hyperbole H d'équation y = $\frac{1}{x}$ par la translation t de vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.



5°) L'hyperbole H a pour centre de symétrie O (0, 0) donc la courbe C_f admet un centre de symétrie I qui est l'image du point O par la translation t.
I a pour coordonnées (3 , 2).

6°) Tableau de variation de f :

x	–∞	3	+∞
f(x)	↘	‖	↘

7°) Représentations graphiques des courbes H et C_f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci dessus
Exercice n°4 : Soit les fonctions suivantes :

x	-5		0		2		5
$f(x)$	2	↗	4	↘	2	↗	5

x	-5		0		2		5
$g(x)$	5	↘	2	↘	0	↗	4

En déduire les variations des fonctions suivantes :

Cocher une seule case par ligne	*croissante*	*décroissante*	*On ne peut pas conclure*
1. Sur [-5 ; 0] la fonction $f+g$ est strictement …			
2. Sur [-5 ; 0] la fonction $f\times g$ est strictement …			
3. Sur [-5 ; 0] la fonction $-f$ est strictement …			
4. Sur [-5 ; 0] la fonction $\frac{1}{f}$ est strictement …			
5. Sur [-5 ; 0] la fonction $g\circ f$ est strictement …			
6. Sur [0 ; 2] la fonction $f+g$ est strictement …			
7. Sur [0 ; 2] la fonction $f\circ g$ est strictement …			
8. Sur [0 ; 2] la fonction $g\circ f$ est strictement …			
9. Sur [2 ; 5] la fonction $f+g$ est strictement …			
10. Sur [2 ; 5] la fonction $f-g$ est strictement …			
11. Sur [2 ; 5] la fonction $f\times g$ est strictement …			
12. Sur [2 ; 5] la fonction $f\circ g$ est strictement …			

1. 2. **La fonction f est strictement croissante sur [-5 ; 0] et g est strictement décroissante sur [-5 ; 0]**:
On ne peut pas conclure pour f+g et $f\times g$.

3. La fonction f est strictement croissante sur [-5 ; 0] donc la fonction -f est strictement décroissante sur [-5 ; 0].

4. $\frac{1}{f} = u \circ f$ où u est la fonction inverse.
Pour tout réel x de [-5 ; 0], $f(x) \in J$ avec J = [2 , 4].
la fonction inverse est strictement décroissante sur [2 , 4].
Conclusion : $\frac{1}{f}$ est strictement décroissante sur [-5 ; 0] comme composée de fonctions ayant des sens de variations contraires.

5. Pour tout réel x de [-5 ; 0], $f(x) \in J$ avec J = [2 , 4].
La fonction g est strictement croissante sur [2 , 4] .
Conclusion : la fonction $g\circ f$ est strictement croissante comme composée de fonctions ayant même sens de variation.

6. Sur [0 ; 2] la fonction f est strictement décroissante et g est strictement décroissante.
Donc f + g est strictement décroissante comme somme de fonctions strictement décroissantes sur [0 , 2].

7. Pour tout réel x de [0 , 2], $g(x) \in J$ avec J = [0 , 2].
La fonction f est strictement décroissante sur [0 , 2] .
Conclusion : la fonction $f\circ g$ est strictement croissante comme composée de fonctions ayant même sens de variations.

8. Pour tout réel x de [0 , 2], $f(x) \in J$ avec J = [2 , 4].
La fonction g est strictement croissante sur [2 , 4] .
Conclusion : la fonction $g\circ f$ est strictement décroissante comme composée de fonctions ayant des sens de variation contraires.

9. Sur [2 , 5] les fonction f et g sont strictement croissantes donc f + g est strictement croissante.
10. On ne peut pas conclure pour f – g.

11. $f\times g$ est strictement croissante sur [2,5] comme produit de deux fonctions strictement croissante et **positives** sur [2 , 5] .

12. Pour tout réel x de [2 , 5], $g(x) \in J$ avec J = [0 , 4].
f n'est pas strictement monotone sur [0, 4], on ne peut pas conclure pour $f\circ g$