CHAPITRE 5 : SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

I) Propriétés fondamentales

1°) Règles de base

Règle 1 : par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.
Autrement dit : **deux points distincts A, B définissent une droite et une seule notée (AB).**

Règle 2 : par trois points distincts A, B et C non alignés, il passe un seul plan et un seul noté (ABC).

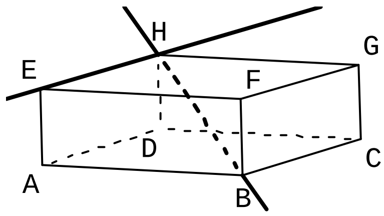
Remarque :
(ABC) désigne le plan défini par les points A, B, C alors que ABC désigne le triangle de sommets A, B et C.

Règle 3 : si A et B sont deux points d'un plan P alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.
On dit que la droite (AB) est incluse (ou contenue) dans le plan P. On note $(AB) \subset P$.

Définition 1: lorsque des objets (points, droites, etc.) sont situés dans un même plan, on dit qu'ils sont coplanaires.

Règle 4 : dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les résultats de la géométrie plane (théorèmes de Pythagore, de Thalès,..). L'important est de préciser dans quel plan on se situe.

2°) Application : savoir caractériser un plan de l'e space.



***Exercice n°*1** : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les droites (EH) et (HB) définissent-elles un unique plan P. Expliquer.

3°) Détermination d'un plan.
Propriété : Un plan est défini soit par :

a) trois points non alignés
b) une droite et un point n'appartenant pas à la droite
c) deux droites sécantes
d) deux droites strictement parallèles.

II) Positions relatives de deux droites :

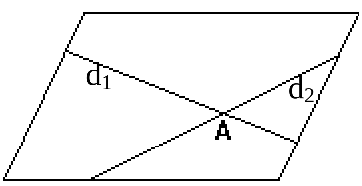
Deux droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

Règle 5 :

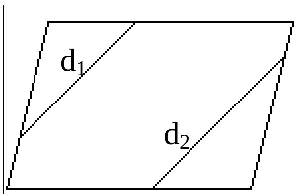
Soit d_1 et d_2 deux droites de l'espace. Il existe deux possibilités : elles sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
Si elles sont coplanaires alors elles sont soit sécantes, c'est à dire elles ont un seul point commun, soit parallèles (éventuellement confondues).
Si elles sont non coplanaires alors elles n'ont aucun point commun.

Autrement dit deux droites de l'espace sont :

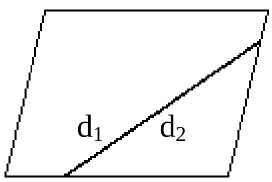
- soit coplanaires



d_1 et d_2 sont sécantes en A.
$d_1 \cap d_2 = \{A\}$

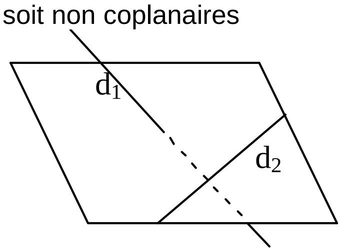


d_1 et d_2 sont strictement parallèles
$d_1 \cap d_2 = \{ \}$



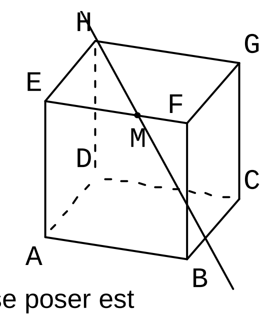
d_1 et d_2 sont confondues
$d_1 = d_2$

- soit non coplanaires



Aucun plan ne contient d_1 et d_2.
$d_1 \cap d_2 = \{ \}$

Exercice n°2 : On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
1°) Dans chaque cas, indiquer la position relative des droites :
a) (AB)et (EF) b) (AB) et (CG) c) (AF)et (HC) d) (HF) et (EG)
2°) Le point M est un point libre du segment [EF].
Dans chaque cas, chercher la position du point M ne permettant pas de définir un plan.
a) avec le point M et la droite (FG) b) avec les droites (FB) et (MH)
c) avec les droites (BC) et (MH)



Méthode : pour étudier la position relative de deux droites dans l'espace, la première question à se poser est « sont-elles coplanaires ou non coplanaires ? ». *Pour s'entraîner : exercice n°1 du TD n°……*

CHAPITRE 5 : SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

Remarque : dans l'espace deux droites qui n'ont aucun point commun (c'est à dire disjointes) ne sont pas nécessairement parallèles.

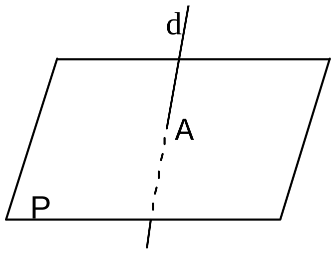
III) Positions relatives d'une droite et d'un plan :

1°) Règle n°6 :

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants (et dans ce cas ils ont un seul point commun), soit parallèles (et dans ce cas soit la droite est incluse dans le plan, soit la droite et le plan n'ont aucun point commun).

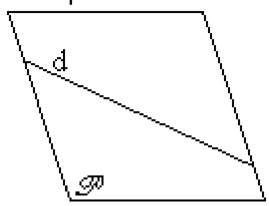
Autrement dit une droite et un plan de l'espace sont :

- soit sécants

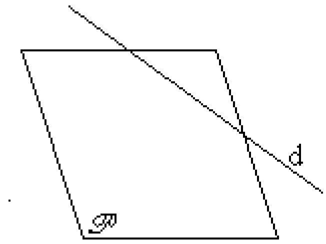


d et P ont un point d'intersection A
$d \cap P = \{A\}$

- soit parallèles



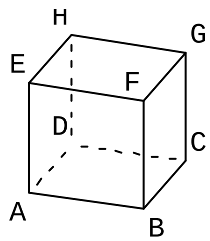
d est contenue dans P.
$d \subset P$



d et P sont strictement parallèles.
$d \cap P = \varnothing$

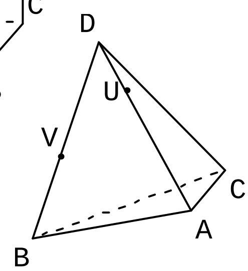
Cf : Geoplan-Geospace\Exemples\Espace\CoursEspace\Plan.g3w

2°) Application :
Exercice n°3 : On considère le cube représenté ci-contre
Indiquer (sans justifier) la position relative de la droite et du plan suivant :
a) (FD)et (AEH) b) (HF) et (EFG) c) (EG) et (ABC)



3°) Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan

Exercice n°4 : Deux points U et V appartenant respectivement aux côtés [DA] et [DB] d'un tétraèdre DABC sont tels que la droite (UV) n'est pas parallèle au plan de base (ABC).
Construire le point d'intersection de la droite (UV) avec (ABC).
Pour s'entraîner : exercice n°2 du TD n°……

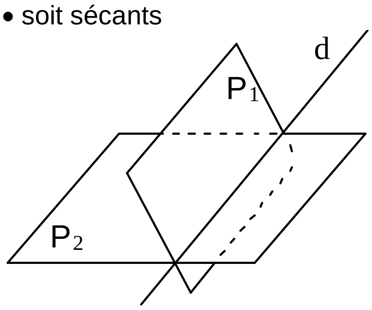


IV) Positions relatives de deux plans :

1°) Règle 7 :

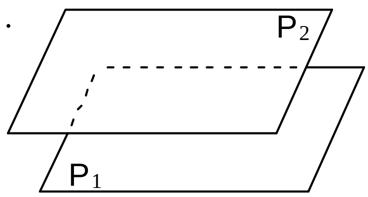
Deux plans de l'espace sont soit sécants (et dans ce cas ils se coupent suivant une droite), soit parallèles (et dans ce cas s'ils ne sont pas confondus, ils n'ont aucun point en commun).
Autrement dit deux plans sont :

- soit sécants

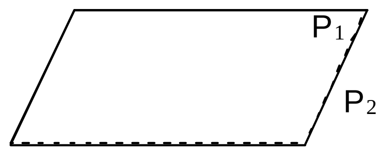


P_1 et P_2 ont une droite d'intersection d
$P_1 \cap P_2 = d$

- soit parallèles



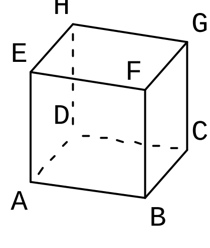
P_1 et P_2 sont strictement parallèles
$P_1 \cap P_2 = \varnothing$



P_1 et P_2 sont confondus
$P_1 = P_2$

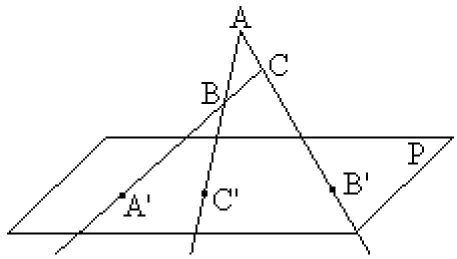
Cf : Geoplan-Geospace\Exemples\Espace\CoursEspace\Planseca.g3w

2°) Applications :
Exercice n°5 : Indiquer sans justifier la position relative des plans suivants :
a) (EHD)et (ADE) b) (HGC) et (ABF) c) (HGE)et (EFC)



CHAPITRE 5 : SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

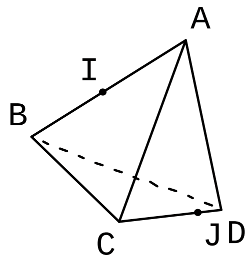
Exercice n°6 *:* P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.



3°) Trouver une intersection de deux plans sécants.

Méthode : on trouve deux points communs aux deux plans et l'intersection est la droite passant par ces deux points.

Exercice n°7
ABCD est un tétraèdre.
I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD] (I et J sont distincts des extrémités du segment).



Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).

Pour s'entraîner : exercices n°3 du TD n°….et 2 et 3 p 300.

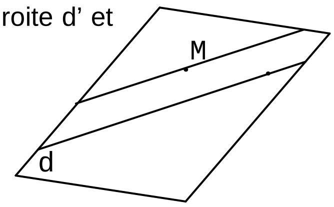
V) Droites parallèles

1°) Remarques : Dans le plan quand deux droites ne sont pas sécantes, elles sont alors parallèles.
Dans l'espace, il en va différemment : il existe des droites qui ne sont ni sécantes ni parallèles.

2°) Définition 2 : Deux droites de l'espace sont par allèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

3°) Axiome d'Euclide : Par tout point de l'espace, i l passe une seule droite parallèle à une droite donnée.

En d'autres termes : Etant donné un point M et une droite d de l'espace, il passe par M une droite d' et une seule parallèle à d.
Si M $\notin$ d alors d' est contenue dans le plan défini par M et d.
Si M $\in$ d alors d' et d sont confondues.



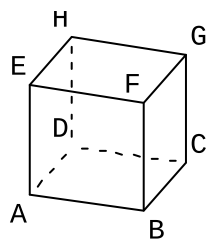
4°) Parallélisme entre droites :

a) Propriété 1 : Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

En d'autres termes : si d // d'' et d' // d'', alors d // d'.

b) Application : Démontrer que deux droites sont parallèles.

Exercice n°8 : ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Démontrer que les droites (AB) et (GH) sont parallèles.



VI) Plans parallèles

1°) Définition 3 : Deux plans sont parallèles lorsqu 'ils ne sont pas sécants.

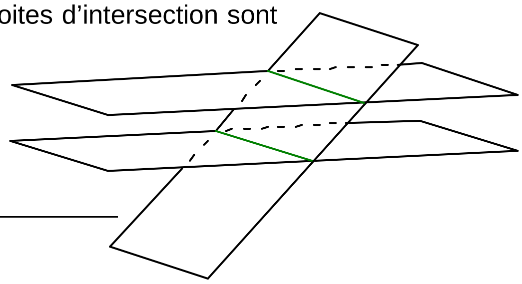
2°) Axiome d'Euclide : Par tout point de l'espace, i l passe un seul plan parallèle à un plan donné

Autrement dit : Etant donné un point M et un plan P de l'espace, il passe par M un plan P' et un seul parallèle à P.

3°) Propriété 2 :

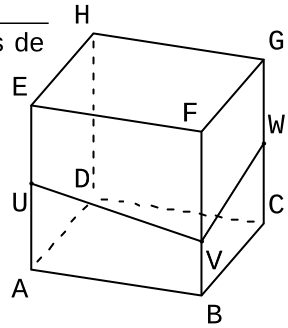
Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles

En d'autres termes : Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.



CHAPITRE 5 : SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

4°) Conséquence et applications :



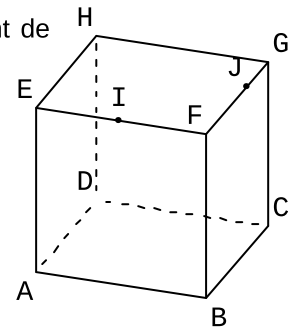
Dans un solide présentant des faces parallèles, les droites d'intersection d'un plan avec les plans de deux faces parallèles sont des droites parallèles.

a) Trouver une intersection d'un plan sécant avec deux plans parallèles

Exercice n°9 : Dans le cube ABCDEFGH, $U \in [AE]$, $V \in [BF]$, $W \in [CG]$.
Déterminer l'intersection du plan (P) défini par U et la droite (VW) avec la face ADHE du cube.

b) Construire la section d'un pavé par un plan en utilisant un parallélisme.

Pour s'entraîner : exercice n°4 du TD n°……

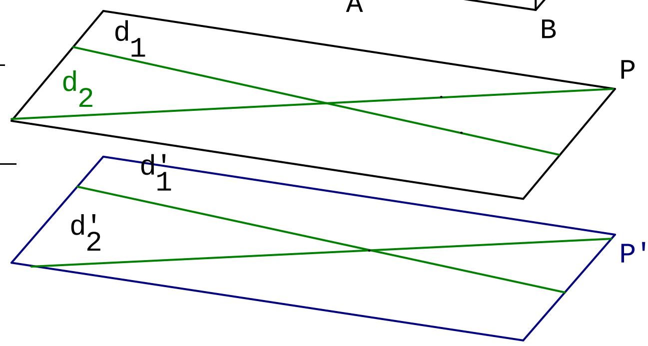


Exercice n°10 : Dans le pavé ci-contre, le point I est un point de l'arête [EF] et le point J un point de l'arête [FG].
Construire la section du pavé par le plan (AIJ)

5°) Propriété 3 : deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

En d'autres termes : si P // P'' et P' // P'', alors P // P'.

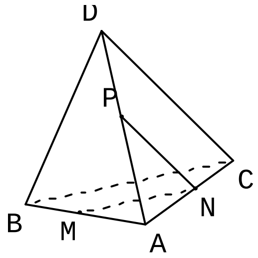
6°) Propriété 4 :



Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors les plans P et P' sont parallèles.

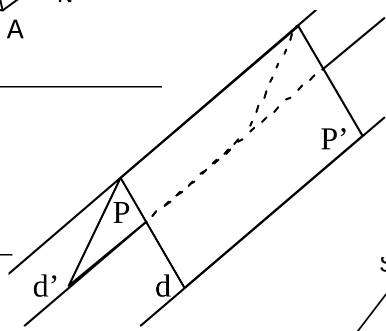
Cf : Geoplan-Geospace\Exemples\Espace\CoursEspace\Planpara.g3w

Exercice n°11 *:*



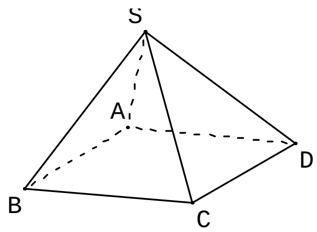
ABCD est un tétraèdre.
M est un point de [AB]
N est un point de [AC] tels que : (MN) // (BC)
P est un point de [AD] tels que : (NP) // (CD).
Démontrer que les plans (MNP) et (BCD) sont parallèles .
Pour s'entraîner : exercice n°5 du TD n°……

VII) Théorème du toit



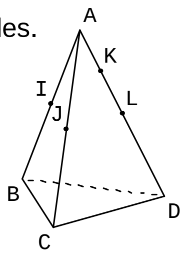
Si : • *d* et *d*' sont deux droites parallèles.
• P est un plan contenant *d*, et P' un plan contenant *d*'.
• les plans P et P' sont sécants suivant la droite Δ,
alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à *d* et à *d*'.

Cf : Geoplan-Geospace\Exemples\Espace\CoursEspace\Toitheo.g3w



Exercice n°12 *:* SABCD est un pyramide dont la base ABCD est carrée.
Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).

Exercice n°13 *:* Soit un tétraèdre ABCD.
On note I, J, L et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [AD] et [AL].
Dessiner la droite d intersection des plans (IJK) et (BCD) puis démontrer que les droites d et (IJ) sont parallèles.



VIII) Parallélisme entre droite et plan

1°) Définition 4 : une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Remarque : une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

2°) Propriété 5 :

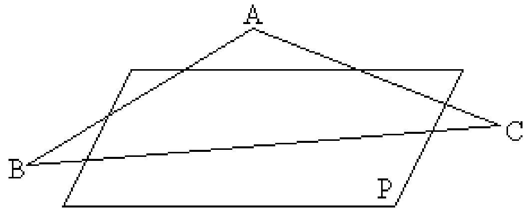
CHAPITRE 5 : SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

Si une droite *d* est parallèle à une droite *d*', alors la droite *d* est parallèle à tout plan contenant la droite *d*'.

Propriété 6 : si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Exercice n°14 : Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.
a) Montrer que (BC) est parallèle à P.

b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.



IX) Section d'un polyèdre par un plan

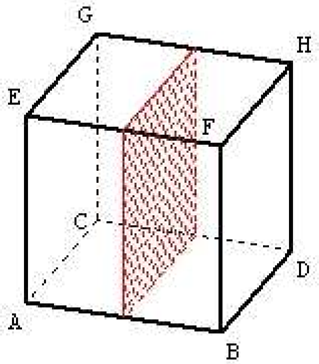
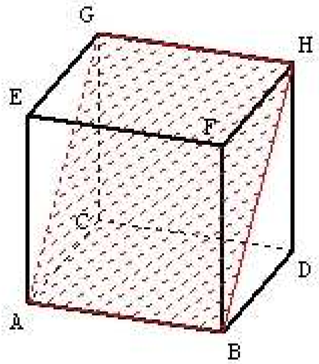
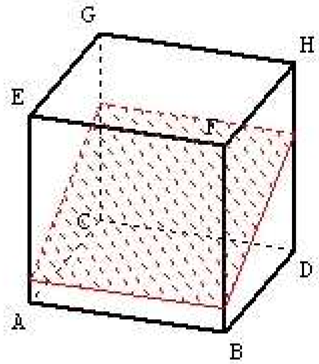
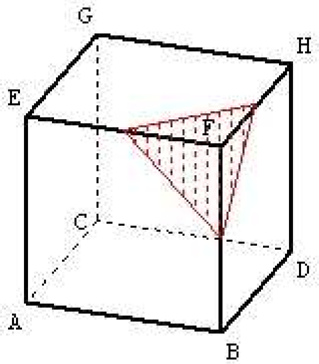
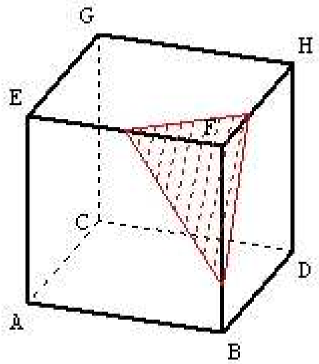
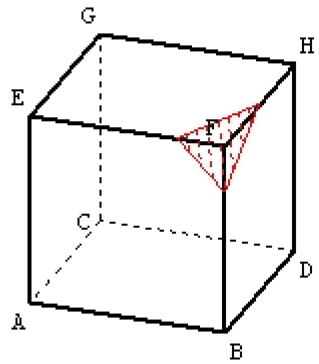
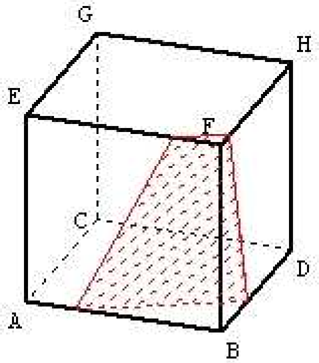
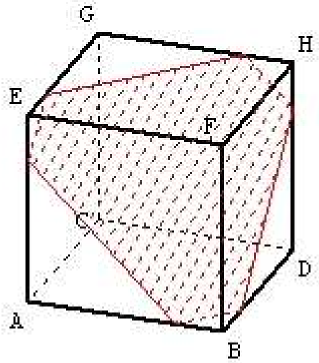
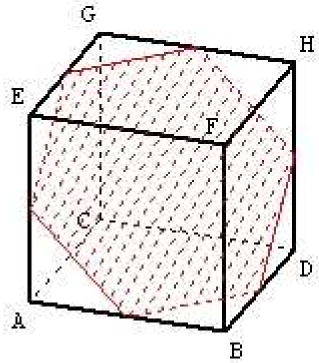
Définition : la **section d'un polyèdre par un plan** est le polygone dont les côtés sont les intersections du plan avec les faces du polyèdre.

X) Sections planes d'un cube :

1°) Activité d'approche : voir TP info n°2.

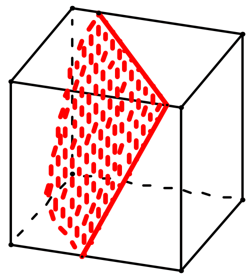
2°) Théorème : toute section plane d'un cube est un polygone ayant de 1 à 6 sommets.

Quelques exemples :

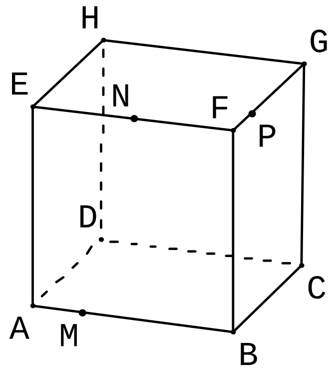
 1 - un carré	 2 - un rectangle (le plus grand possible)	 3 – un autre rectangle
 4 – un triangle équilatéral	 5 – un triangle quelconque	 6 – un triangle isocèle
 7 – un trapèze	 8 – un hexagone	 9 - un hexagone régulier

.

Autre exemple : un pentagone



3°) construire la section d'un cube par un plan :

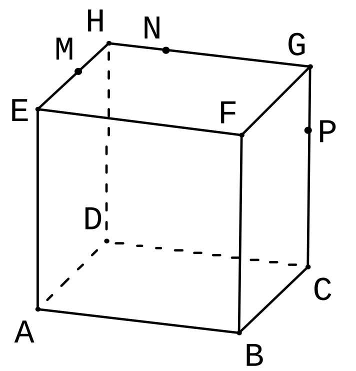


a) Méthode : pour déterminer la section d'un cube par le plan (MNP), il faut déterminer la section de chaque face par le plan (MNP), c'est à dire l'intersection de chaque plan contenant chaque face et du plan (MNP), puis l'intersection de chaque face proprement dite et du plan (MNP).

b) en restant sur le solide

Exercice n°15 **:** ABCDEFGH est un cube d'arête a.
M, N et P sont les points situés respectivement sur les arêtes [AB], [EF] et [FG] tels que $AM = \frac{1}{4}a$, $EN = \frac{1}{2}a$, $FP = \frac{1}{4}a$.
Construire la section du cube par le plan (MNP)

c) en sortant du solide.

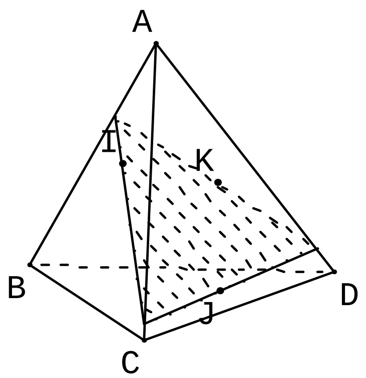


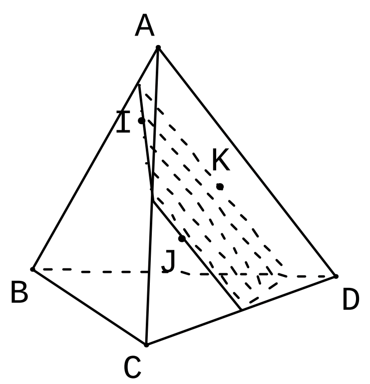
Exercice n°16 : On considère le cube ABCDEFGH ci contre.
Les points M, N et P appartiennent respectivement aux côtés [EH], [HG] et [CG].
Déterminer la section du cube ABCDEFGH par le plan (MNP).

XI) Sections planes d'un tétraèdre

La section d'un tétraèdre par un plan peut être de la nature suivante :
un point, un segment, un triangle ou un quadrilatère.

Exemples : voir tp info n°3





Exercice n°17 : On considère le tétraèdre ABCD ci contre.
Les points M, N et P appartiennent respectivement aux côtés [AB], [AD] et [BC].
Déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP).