BAC GMA 2008 : VARIATIONS D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 2π] par $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$

1. a) $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2} \times (-2)\sin(2x) + 1$. C'est à dire $\boxed{f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)}$

b) $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos x$ donc $f'(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos x)$

2. $\sin(x)(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow$ $\sin(x) = 0$ ou 1 + 2cosx = 0

• sin(x) = 0 ⇔ $(x = 0 + 2k\pi)$ ou $(x = \pi + 2k\pi)$ avec k entier relatif

• 1 + 2cosx = 0 ⇔ 2cosx =- 1⇔ $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ avec k entier relatif

Conclusion : $\boxed{\text{sur l'intervalle } [0, 2\pi] \text{, l'équation a cinq solutions } 0,\ \pi,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3} \text{ et } 2\pi.}$

3. a) Signe de f'

Valeurs de x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de f'		-	0	+	0	-	0	+	

b) tableau de variation

Valeurs de x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de f'		-	0	+	0	-	0	+	
Variation de f	2,5	↘	0,25	↗	0,5	↘	0,25	↗	2,5

$f(0) = \cos(0) + \frac{1}{2}\cos(0) + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi}{3}) + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

$f(\pi) = \cos(\pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi) + 1 = -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\frac{4\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{8\pi}{3}) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

$f(2\pi) = \cos(2\pi) + \frac{1}{2}\cos(4\pi) + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$