BACCALAURÉAT BLANC TECHNOLOGIQUE SÉRIE STI GÉNIE MECANIQUE A ET C

Avril 2008
Epreuve de mathématiques
Durée : 4 heures – coefficient 4

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)
Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Exercice n°1 : (4 points, 50 min).

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

- le joueur mise 10 euros.

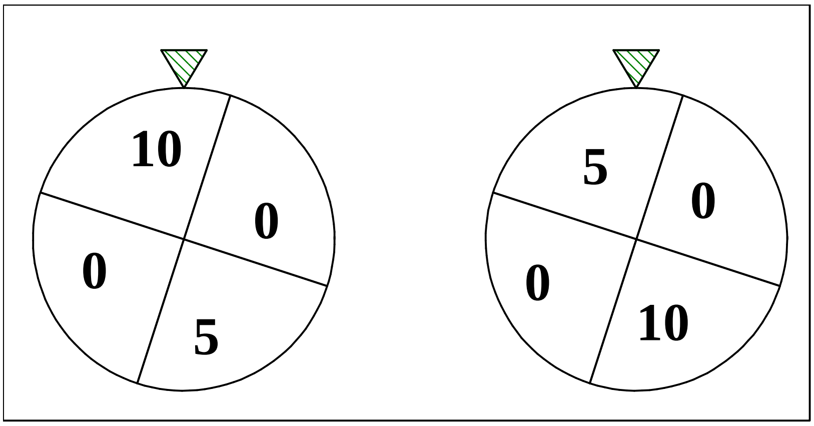
- il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

- Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros : 10; 0; 5; 0.

Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

Le gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.

Dans l'exemple ci-contre, la partie assure au joueur un gain de 15 €.



1. Étude du gain du joueur pour une mise de 10 euros.

On nomme *G* la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a. **(0,25 pt)** Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire *G* selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

		Roue n°1			
		10	0	5	0
Roue n°2	10				
	0				
	5				
	0				

b.(0,5 pt) Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.
c. (1,25 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire *G*.
d. (0,5 pt) Calculer la probabilité, notée $p(G>10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.
e. (0,5 pt) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire *G*, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une valeur de la mise de m euros.

On suppose dans cette question que la mise du joueur est *m* euros.
On note *B* la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire le différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a. (0,5 pt) Exprimer, en fonction de *m* l'espérance mathématique de la variable aléatoire *B*.
b. (0,5 pt) Déterminer *m* pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

Exercice n°2 : (5 points) : Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$.

On pose : $z_2 = \overline{z_1}$ où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1, $z_3 = -z_1$, $z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = z_1 z_4$

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 , z_3 et z_4 .

3. a) Montrer que le module de z_5 est 3 et qu'un argument de z_5 est $\frac{5\pi}{6}$

b) Quelle est la forme algébrique de z_5 ?

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm).

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_5.

a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.

b) Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.

c) Calculer les distances AC et BD.

d) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Problème : (11 points).

Soit la fonction f est définie sur l'intervalle]2 ; +∞ [par : f(x) = $\frac{1}{2}$ x – 5 + 3ln(x – 1) – 3 ln(x –2).

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal (1 cm pour une unité en abscisses et 2 cm pour une unité en ordonnées).

Partie A : Etude de la fonction f.

1. **a**) Déterminer la limite de la fonction f en 2. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b) Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle]2 ; +∞ [, $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

c) En déduire la limite de la fonction f en +∞.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation y = $\frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en +∞.

3. **a**) Calculer f'(x) et montrer que pour tout réel x de l'intervalle]2 ; +∞ [, $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$.

b) Etudier le signe de f '(x) sur l'intervalle]2 ; +∞ [.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle]2 ; +∞ [.

Partie B : Représentation graphique.

1.

a) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [2,1 ; 3] et une solution unique β dans l'intervalle [9 ; 10].

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

2. Déterminer une équation de la droite T tangente à (C) au point d'abscisse 3.

3. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et (C) dans le repère donné

Partie C : Calcul d'aire.

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle]2 ; +∞ [par

$h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et H(x) = (x – 1) ln(x -1) – (x-2)ln(x – 2).

a) Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle]2 ; +∞ [.

b) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle]2 ; +∞ [.

2. On considère le domaine D du plan compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 3 et x = 9.

a) Hachurer le domaine D sur le graphique.

b) On note A la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine D. Exprimer A sous la forme d'une intégrale.

c) Calculer la valeur exacte de A en unité d'aire puis une valeur approchée à 10^{-1} près.

d) Donner une valeur approchée de A en cm^2.