BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE SÉRIE STI GÉNIE MECANIQUE OPTION C. Juin 2005.

Exercice n°1 (5 points, 1h) :

Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$. On pose :

$$z_2 = \bar{z}_1 \text{ où } \bar{z}_1 \text{ désigne le nombre complexe conjugué de } z_1, \quad z_3 = -z_1, \quad z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 .
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3 .
3. a) Montrer que $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
 b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4 .
 c) Quelle est la forme algébrique de z_4 ?
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm).

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives z_1 , z_2 , z_3 et z_4 .

- a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.
- b) Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs coordonnées.
- c) Calculer les distances AC et BD.
- d) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice n°2 (4 points, 1h) :

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :
$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

3. a) Montrer que, pour tout nombre réel x , on peut écrire : $f(x) = 2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$.

- b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

4. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Problème (11 points, 2 heures)

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x , par : $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + e^x - 2x$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm).

1. Comportement de f en $-\infty$.

- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à la courbe C .
- c) Etudier les positions relatives de la courbe C et de la droite Δ .

2. Comportement de f en $+\infty$.

- a) Montrer que, pour tout nombre réel x différent de 0, on peut écrire : $f(x) = x \left(\frac{e^{2x}}{2x} + \frac{e^x}{x} - 2 \right)$

- b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Etude des variations de f :

- a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que l'on a pour tout nombre réel x , $f'(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$
- b) Etudier le signe de $f'(x)$, lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels.
- c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Tracer la droite Δ et la courbe C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. Calcul d'une aire.

Soit α un nombre réel strictement négatif.

- a) Hachurer la partie H du plan limitée par la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.
- b) Calculer, en fonction de α et en unités d'aire la valeur de l'aire de la partie H , que l'on notera $A(\alpha)$.
- c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$. Interpréter le résultat obtenu.