BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE SÉRIE STI GÉNIE MECANIQUE OPTION A. Juin 2006.

Exercice 1 (5 points) (nombres complexes) : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 - 2i$. On pose $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire z_3 sous forme algébrique.

2.a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_3.

c) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique.

3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

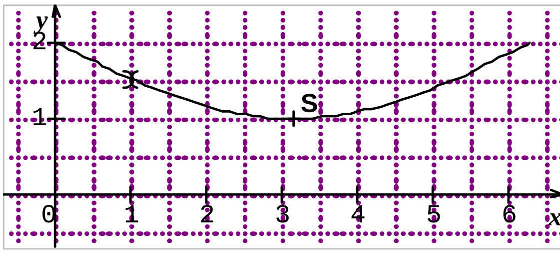
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Sur papier millimétré, construire les points A et B, images respectives de z_1 et z_2.

b) Déterminer la nature du triangle OAB.

Exercice 2 (4 points) (équations différentielles)

On donne ci-dessous la représentation graphique C, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, de la fonction f définie sur [0 ; 2 π] par : $f(x) = 2 - \sin\dfrac{x}{2}$.



1.Vérifier, par le calcul, que :

a) La courbe C passe par le point S (π ; 1).

b) La tangente à la courbe C au point S est parallèle à l'axe des abscisses.

c) La fonction f est solution de l'équation différentielle : 4y'' + y - 2 = 0.

2. On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la courbe C lors de sa rotation autour de l'axe des abscisses.

On rappelle que la valeur V de ce volume, en unités de volume, est donnée par la formule : $V = \pi\displaystyle\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx$

a) On pose, pour tout nombre réel x, appartenant à [0 ; 2 π], g(x) = $[f(x)]^2$. Démontrer que l'on a : $g(x) = \dfrac{9}{2} - 4\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x$.

b) Donner la valeur exacte de ce volume en cm^3, puis sa valeur arrondie au mm^3 près.

Problème (11 points) : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$ sur]-1 ; +∞ [

Partie A

1. Calculer la limite de f en +∞.

2. a) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]-1 ; +∞ [$f(x) = \dfrac{1}{1+x}\left[2x - (1+x)\ln(1+x)\right]$

calculer la limite de f en -1 (on pourra utiliser sans démonstration $\lim\limits_{x\to 0} X\ln X = 0$).

b) En déduire une équation d'une droite D asymptote à C .

3. Déterminer la dérivée f ' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]-1 ; +∞ [, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

4. a) Etudier le signe de f '(x) sur l'intervalle]-1 ; +∞ [.

b) Calculer la valeur exacte de f (1).

c) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle]-1 ; +∞ [

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

2. a) Justifier que l'équation f(x) = 0 a une seule solution α dans l'intervalle [1 ; 5].

Démontrer que. $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle [0 ; α].

4. Tracer, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, la tangente T, la droite D puis la courbe C.

Partie C

1. Démontrer que, sur l'intervalle]-1 ; +∞ [, la fonction F définie par F(x) = (-3-x)ln(1+x)+3x est une primitive de la fonction f.

2. Soit H la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = α .

a) Hachurer la partie H sur le dessin.

b) Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, l'aire A(α) de la partie H et démontrer que $A(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2 - 3\alpha}{1+\alpha}\right)\,cm^2$.