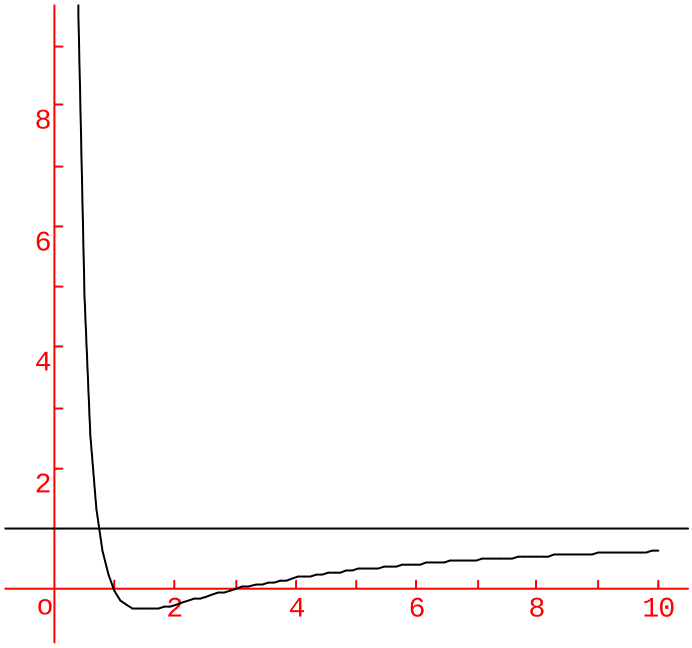
FONCTION LN : BAC GE GET 2000.

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément.

PROBLEME : 12 points

Partie A - Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur]0, +∞ [dont la représentation graphique C obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure 1 ci contre.
On précise que la courbe C ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.



1. À partir de cette représentation graphique, déterminer :
a. Déterminer la limite de g(x) quand x tend vers 0.
b. Déterminer la limite de g(x) quand x tend vers l'infini.

2. Dresser un tableau donnant le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle]0, +∞ [

3. On admet que $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ où a, b et c sont trois nombres réels.

a. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que a = 1.
b. Lire g(1) et g(3) sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.
c. Résoudre ce système et exprimer g(x) en remplaçant a, b et c par leurs valeurs.

Partie B - Étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur]0, +∞ [par : $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$.

1. **a.** En mettant x en facteur dans l'expression de f(x), montrer que la limite de f(x) lorsque x tend vers +∞ est égale à +∞.
b. En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de f(x), montrer que la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 est égale à -∞.

2. **a.** Calculer la dérivée f ' de f et montrer que f '(x) = g(x).
b. Utiliser les résultats de la partie A pour en déduire le tableau de variations de f.
c. Calculer les valeurs exactes de f(1) et f(3).

3.En utilisant le tableau de variations de f, justifier que l'équation f(x) = 0 :
a. n'admet pas de solution dans l'intervalle]0 ; 3[;
b. admet une solution unique, notée x_0, dans l'intervalle [3 ; 10]
c. n'admet pas de solution dans l'intervalle]10 ; +∞[.

4. Compléter le tableau ci-dessous et en déduire et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

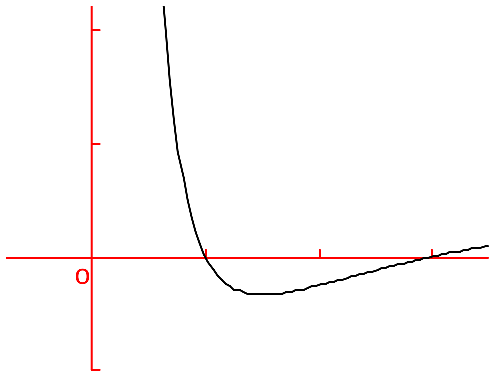
x	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
f(x)											

On donnera des valeurs arrondies de f(x) au millième près.

Partie C - Calcul d'aire.

1. Montrer que $f\left(\sqrt{3}\right)=-2\ln 3$ (détailler les calculs).

2. Le tracé de la courbe C représentant g dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donné sur la figure ci-contre.



a. Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe C d'une part et les droites d'équations x = 1 et x = 3, d'autre part.
Déterminer l'aire A du domaine D dans l'unité d'aire définie par le repère.
On donnera sa valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près.
b. Tracer la droite L d'équation x = $\sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales