FONCTION EXPONENTIELLE : Exercice n°103 page 351.

Première partie :

$g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

1°) $e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $\ln\left(e^{2x}\right) \geq \ln 1$.

Or $\ln\left(e^{2x}\right) = 2x$ et ln 1 = 0, on en déduit que $2x \geq 0$, c'est à dire $x \geq 0$.

Conclusion : $\boxed{e^{2x} - 1 \geq 0 \text{ a pour ensemble de solution } [0,+\infty[}$

2°) a) $g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2\left(e^{2x} - 1\right)$

donc g'(x) est du signe de $e^{2x} - 1$

D'après le 1°) g'(x) > 0 a pour ensemble de solution $]0,+\infty[$.

De même g'(x) < 0 a pour ensemble de solution $]-\infty,0[$.

G '(x) = 0 a pour solution x = 0

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Tableau de variation :

x	-∞	0	+ ∞
Signe de g'	-	0	+
Variation de g	↘	0	↗

b) D'après le tableau ci dessus g admet un minimum égal à 0 (pour x = 0).

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) \geq 0}$.

Deuxième partie :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$.

1°) ♦ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{-2x} = -\infty$.

♦ De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$

Conclusion : par somme des limites $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

2°) a) $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1 = xe^{-2x} + e^{-2x} + x + 1$

Or $e^{-2x} = e^{-x} \times e^{-x}$ on en déduit que $f(x) = xe^{-x} \times e^{-x} + e^{-2x} + x + 1 = (xe^{-x})\, e^{-x} + e^{-2x} + x + 1$.

b) ♦On sait que si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$ (cf formulaire) on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ **(1).**

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ **(2).**

Par produit de (1) et (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{-x}\right)e^{-x} = 0$ **(3)**

♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ **(4).**

♦ De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ **(5)**

Conclusion : par somme des limites **(3), (4)** et **(5)** : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

c) $f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-2x}$

Or $(x+1)e^{-2x} = xe^{-2x} + e^{-2x} = xe^{-x} \times e^{-x} + e^{-2x}$.

On a donc par somme des limites **(3)** et **(4)** (voir b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-2x} = 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = 0 \text{ et la droite d'équation } y = x+1 \text{ est asymptote oblique à la courbe}}$.

d) $f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-2x}$

x	-∞		-1		+ ∞
Signe de x+1		-	0	+	
Signe de e^{-2x}		+		+	
Signe de f(x) – (x+1)		-	0	+	
Position relative de C et Δ		C est en dessous de Δ		C est au dessus de Δ	

La courbe C et la droite Δ se coupent au point d'abscisse –1.

3°) a) $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$

$f'(x) = e^{-2x} + (x+1) \times (-2)e^{-2x} + 1$

$f'(x) = e^{-2x} + (-2x-2)e^{-2x} + 1$. Finalement $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} + 1$. Conclusion : $\boxed{f'(x) = 1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}}$

Par ailleurs $e^{-2x}g(x) = e^{-2x} \times \left(e^{2x} - 2x - 1\right) = e^{-2x} \times e^{2x} - e^{-2x} \times 2x - e^{-2x} = e^{0} - 2xe^{-2x} - e^{-2x} = 1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x}$?

Conclusion : $\boxed{f'(x) = e^{-2x}g(x)}$

b) On sait que pour tout réel x, e^{-2x} est positif pour tout réel x.
Par ailleurs pour tout réel x, $g(x) \geq 0$ (cf première partie).

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) \geq 0}$

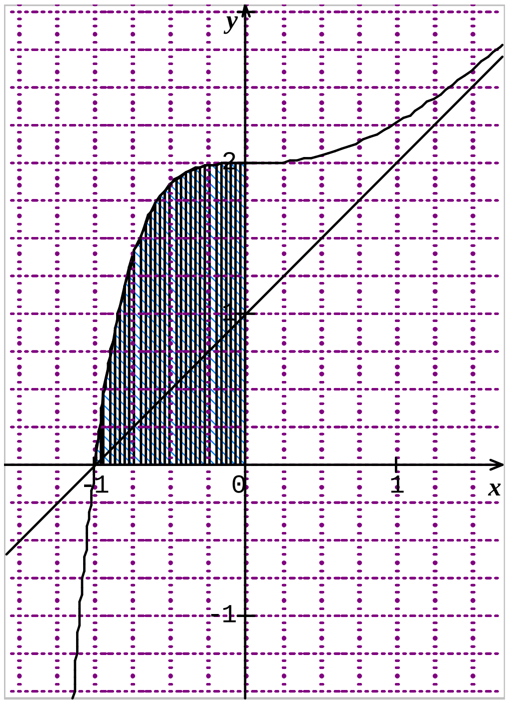
Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de f'	+
Variation de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4) a)

x	-2	-1,5	-1,3	-1,1	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
f(x)	-55,6	-10,54	-4,34	-1	0	1,86	2	2,05	2,27	3,05	4,01	5

Troisième partie



$$H(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x}$$

$$H'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) \times \left(-2e^{-2x}\right)$$

$$H'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \left((-2) \times \left(-\frac{1}{2}x\right) - (-2) \times \frac{3}{4}\right) \times \left(e^{-2x}\right)$$

$$H'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \left(x + \frac{3}{2}\right) \times \left(e^{-2x}\right)$$

$$H'(x) = \left(-\frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}\right) \times \left(e^{-2x}\right)$$

$$H'(x) = (x+1) \times \left(e^{-2x}\right)$$

H'(x) = h(x).

Conclusion : $\boxed{\text{H est une primitive de h}}$

2) $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1 = h(x) + x + 1$

D'après le 1) une primitive de f est $F(x) = H(x) + \frac{x^2}{2} + x$

Conclusion : $\boxed{F(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + x}$.

3) f(-1) = 0.

De plus f est strictement croissante sur ℝ donc $f(x) \geq 0$ sur $[-1;0]$.

Donc l'aire demandée est en unité d'aire $A = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

C'est à dire A = F(0) – F(-1)

$$F(0) = \left(-\frac{3}{4}\right)e^{0} = -\frac{3}{4}$$

$$F(-1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$F(-1) = \left(-\frac{1}{4}\right)e^{2} - \frac{1}{2}$$

$$A = F(0) - F(-1) = -\frac{3}{4} - \left[\left(-\frac{1}{4}\right)e^{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$A = -\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)e^{2} + \frac{1}{2}.$$

La valeur exacte en unité d'aire est : $\boxed{A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2}}$

Une unité d'aire correspond à 4 cm^2.

Conclusion : $\boxed{\text{La valeur exacte de l'aire demandée est en } cm^2 \ -1 + e^2}$