EQUATIONS DIFFERENTIELLES : BAC STI GM 1999

Equation différentielle du premier ordre et étude d'une fonction exponentielle.

Partie A

On donne les deux équations différentielles : E_1 : y' = 3y et E_2 : y' = 2y.

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle E_1 et celle de l'équation différentielle E_2.

2. Soit f une fonction définie sur l'intervalle]-∞,+∞ [par : $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où f_1 désigne une solution de l'équation différentielle E_1 et f_2 une solution de l'équation différentielle E_2.
Déterminer f(x) sachant que f(0) = -2 et f'(0) = - 3.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-∞,+∞ [par $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm pour l'unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour l'unité sur l'axe des ordonnées).

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (On pourra factoriser e^{2x} dans f(x)).

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire une équation d'une asymptote (Δ) à (C).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) et l'axe des abscisses. Etudier la position relative de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer f'(x). Montrer que f'(x) a même signe que $e^x - 2$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle] -∞,+∞ [.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point B d'abscisse 0.

5. Tracer la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie C
On appelle D le domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln 3.
1. Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle] -∞,+∞ [.

2. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine D.

Correction

Partie A
E_1 : y' = 3y ⇔ y' – 3y = 0
E_2 : y' = 2y ⇔ y' – 2y = 0
1. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions définies sur ℝ par $f_1(x) = k_1e^{3x}$ où k_1 est une constante réelle.

Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions définies sur ℝ par $f_2(x) = k_2e^{2x}$ où k_2 est une constante réelle.

2. $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$
$f(x) = k_1e^{3x} + k_2e^{2x}$ donc $f(0) = k_1e^0 + k_2e^0 = k_1 + k_2$.
Or f(0) = -2 donc $k_1 + k_2 = -2$
$f(x) = k_1e^{3x} + k_2e^{2x}$ donc $f'(x) = 3k_1e^{3x} + 2k_2e^{2x}$. D'où $f'(0) = 3k_1e^0 + 2k_2e^0 = 3k_1 + 2k_2$.
Or f'(0) = -3 donc $3k_1 + 2k_2 = -3$.
On a donc :
$$\begin{cases} k_1 + k_2 = -2 \\ 3k_1 + 2k_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k_1 - 2k_2 = 4 \\ 3k_1 + 2k_2 = -3 \end{cases}$$
En additionnant membre à membre on obtient : $k_1 = 1$.
On a donc $1+k_2 = -2$. Soit $k_2 = -3$.

Finalement : $\boxed{k_1 = 1,\ k_2 = -3,\ f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}}$

Partie B : $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$

1. a) $f(x) = e^{2x} \times e^x - 3e^{2x} = e^{2x}(e^x - 3)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 3) = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES : BAC STI GM 1999

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{2x} = 0$ donc par différence $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

On en déduit que la droite (Δ) d'équation y = 0 (axe des abscisses) est asymptote à (C) en -∞.

c) L'abscisse du point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses est la solution de l'équation f(x) = 0.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 3) = 0$.
On sait que pour tout réel x, $e^{2x} > 0$
Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Les coordonnées de A sont (ln3 ; 0).
La position relative de (C) par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de *f*(*x*). On a donc :
La courbe (C) est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle] -∞;ln3] et au-dessus de cet axe sur l'intervalle [ln3; + ∞[.

2. $f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} = 3e^{2x} \times e^x - 6e^{2x} = 3e^{2x}(e^x - 2)$

Pour tout réel x, $3e^{2x} > 0$ donc f ' est du signe de $e^x - 2$.

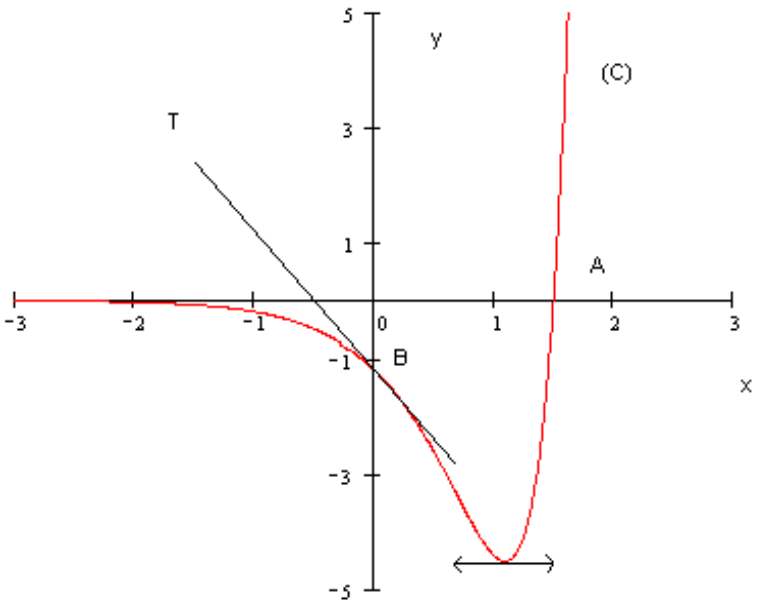
D'où $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2$
On sait que la fonction ln est strictement croissante sur]0,+∞ [
Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

3. Il en résulte du 2. le tableau de variation suivant :

x	+∞		ln2		+∞
Signe de f'(x)	‖	-	0	+	
Variations de f	0	↘	-4	↗	+∞

4. Une équation de la tangente T à (C) au point B d'abscisse 0 est y = f'(0)(x – 0) + f(0).
$f(0) = e^0 - 3e^0 = 1 - 3 = -2$
$f'(0) = 3e^0 - 6e^0 = 3 - 6 = -3$
Conclusion : $\boxed{\text{une équation de T est } y = -3x - 2}$

5. Voir figure



Partie C

1. F est primitive de f. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3}{2}e^{2x}$

2. f est négative sur [0 ; ln3] donc $A = -\int_0^{\ln 3} f(x)dx$.

A = - [F(ln3) – F(0)]

$$F(0) = \frac{1}{3}e^0 - \frac{3}{2}e^0 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{2}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$F(\ln 3) = \frac{1}{3}e^{3\ln 3} - \frac{3}{2}e^{2\ln 3} = \frac{1}{3}e^{\ln 3^3} - \frac{3}{2}e^{\ln 3^2}$$

$$= \frac{1}{3}e^{\ln 27} - \frac{3}{2}e^{\ln 9} = \frac{1}{3}\times 27 - \frac{3}{2}\times 9 = 9 - \frac{27}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}$$

$A = -\left[-\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{6}\right)\right] = -\left[-\frac{27}{6} + \frac{7}{6}\right] = \frac{20}{6}$. Conclusion : $\boxed{A = \frac{10}{3}\text{ u.a.}}$

Or 1 u.A = 2 cm^2 donc $A = \frac{20}{3}$ cm^2

Il fallait savoir résoudre une équation différentielle, étudier une fonction exponentielle et calculer une aire.