

Énoncé :

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
- 2) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.
- 3) Déterminer u_n en fonction de l'entier n .
- 4) Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
- 5) On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres. Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Correction :

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

- 1) Quand une valeur diminue de 2 % , elle est multipliée par 0,98 :

$$1 - \frac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98 .$$

$$u_1 = u_0 - 0,02 u_0 = 0,98 u_0 = 0,98 \times 20 = 19,60 \text{ mm}$$

$$u_2 = 0,98 u_1 = 0,98 \times 19,60 = 19,21 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 \times 19,21 = 18,83 \text{ mm}$$

- 2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98. Il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison $q = 0,98$.

3) pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 q^n = 20 \times (0,98)^n$

- 4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$$u_{10} = u_0 q^{10} = 20 \times (0,98)^{10} = 16,34 \text{ mm}$$

- 5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$.

$$20 \times 0,98^n \leq 14 \Leftrightarrow 0,98^n \leq \frac{14}{20} \Leftrightarrow 0,98^n \leq 0,7$$

On sait que la fonction \ln est strictement croissante sur $]0, + \infty[$

$$\text{Donc } \ln(0,98^n) \leq \ln(0,7) .$$

$$\text{Or } \ln(0,98^n) = n \ln(0,98) .$$

$$\text{Donc } n \ln(0,98) \leq \ln(0,7) .$$

$$\text{Or } 0,98 < 1 \text{ don } \ln(0,98) < 0$$

$$\text{Donc } n \geq \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,98)} .$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,98)} \approx 17,6 .$$

$$\text{donc } n \geq 18 .$$

Conclusion : il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm. Le temps minimal pour que la pièce soit terminée est 1 minute et 48 secondes :

$$18 \times 6 = 108 \text{ s} = 1 \text{ minute et } 48 \text{ secondes} .$$