CHAPITRE N°……….. : NOMBRES COMPLEXES ET NOTATION EX PONENTIELLE.

I) Rappels :

1°) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe non nul.
Si la notation polaire est z = [ρ,θ], alors la partie réelle de z est ……………… …… et la partie imaginaire de z est …… …………….

Autrement dit :

Le nombre complexe de module ρ et d'argument θ, s'écrit : z = ……………………….…………= …………………………………….

Cette écriture est la forme ……………….……………………….. du nombre complexe.

2°) Nombres complexes et calculs sous forme trigono métrique.

Compléter :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, le module du produit zz' est égal au ………………………….. des deux modules et un argument du produit zz' est la ………….……. ……….. des deux arguments.

$|zz'| = ...$ et $\arg(zz') = ...$ $k \in \mathbb{Z}$

Soit n un nombre entier naturel et z un nombre complexe non nul : $|z^n| = ...$ et $\arg(z^n) = ... + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Soit z un nombre complexe non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = ...$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = ... + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, le module du quotient $\frac{z}{z'}$ est égal au ……………………..………… des deux modules et un argument du quotient $\frac{z}{z'}$ est la ……………………………..des deux arguments.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = ...$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = ...$ …………… $\mathbb{Z}$

Les résultats du cours : « nombres complexes : calculs sous forme trigonométrique » peuvent- être résumés dans le tableau ci-contre

$z.z' = [\rho,\theta].[\rho',\theta'] = [\rho.\rho',\theta+\theta']$
$z^n = [\rho,\theta]^n = [\rho^n, n\theta]$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{[\rho,\theta]} = \left[\frac{1}{\rho},-\theta\right]$
$\frac{z}{z'} = \frac{[\rho,\theta]}{[\rho',\theta']} = \left[\frac{\rho}{\rho'},\theta-\theta'\right]$

II) Notation exponentielle

1°) Définition :

Pour tout nombre réel θ, on pose cos θ + i sin θ = $e^{i\theta}$

Avec cette notation, le nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit : $z = re^{i\theta}$.

Exercice n°1 **:** Soit le nombre complexe $z_1 = -\sqrt{3} + i$, donné sous sa forme algébrique et $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donné sous sa forme exponentielle. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et la forme algébrique de z_2.

Exercice n°2 :

Compléter le tableau suivant :

CHAPITRE N°………. : NOMBRES COMPLEXES ET NOTATION EX PONENTIELLE.

Nombre complexe z à étudier	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle	Aucune des trois formes	ρ	θ
$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$						
$z_2 = -3-3i$						
$z_3 = -1+i\sqrt{3}$						
$z_4 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2$						
$z_5 = \overline{z_3}$						
$z_6 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$						
$z_7 = \sqrt{2}(1-i)$						
$z_8 = -z_2$						
$z_9 = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$						
$z_{10} = \frac{1+\sqrt{2}i}{2}$						
$z_{11} = z_1 \times z_2$						
$z_{12} = z_1 \times z_3$						
$z_{13} = \frac{z_2}{z_3}$						
$z_{14} = z_2 + z_3$						
$z_{16} = z_5 \times z_8$						

2°) Remarque : avec la notation exponentielle le ta bleau du I) devient :

$z.z' = \rho.e^{i\theta}.\rho'.e^{i\theta'} = \rho.\rho'.e^{i(\theta+\theta')}$
$z^n = (\rho.e^{i\theta})^n = \rho^n.e^{in\theta}$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho.e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}.e^{-i\theta}$
$\frac{z}{z'} = \frac{\rho.e^{i\theta}}{\rho'.e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}.e^{i(\theta-\theta')}$

Ces résultats qui rappellent $a^n.a^m = a^{n+m}$, $\left(a^m\right)^n = a^{nm}$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ se retiennent facilement

.

Exercice n°3 **:** Soit les nombres complexes $z_1 = 1+i$ *et* $z_2 = \sqrt{3}-i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b) En déduire la forme exponentielle de z_1z_2, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

Exercice n°4 **:** Exercice Bac Chimie de Laboratoire et de Procédés Industriels. Juin 2002 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

On appelle i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle notation exponentielle du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $z=re^{i\vartheta}$, où r est le module de z et ϑ un argument de z.

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-z+1=0$.

2°) On pose $z_A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_E=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a) Ecrire z_A et z_E en notation exponentielle.
b) Construire les points A et E d'affixes respectives z_A et z_E .

3°) On définit les quatre nombres complexes suivants :
$z_B = z_A^2$; $z_C = z_A^3$; $z_D = z_A^4$; $z_F = z_A^6$.

a) Ecrire ces quatre nombres complexes en notation exponentielle.
b) Démontrer que les points A, B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c) Construire les points B, C, D et F. On justifiera la construction.

***Exercice n°5* (Bac GM C 2005 : 5 points, 1h) :**

Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$. On pose :

$z_2 = \overline{z_1}$ où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1, $z_3 = -z_1$, $z_4 = z_1e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.
3. a) Montrer que $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.
c) Quelle est la forme algébrique de z_4 ?
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2cm).
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.
b) Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.
c) Calculer les distances AC et BD.
d) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

***Exercice n°6* (Bac GM C 2006 : 5 points, 1h) :**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0$.

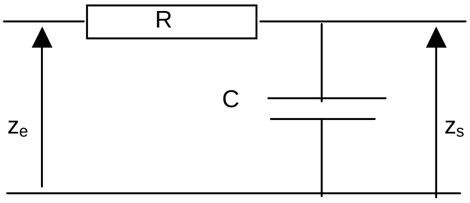
2. Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = 4$, $z_2 = -2-2i\sqrt{3}$, $z_3 = -2+2i\sqrt{3}$, $z_4 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3.
b) Donner les formes algébriques de z_4 et de z_5.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1cm.
Soient les points A, B, C, D et E d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.
a) Placer les points A, B, C, D et E dans le repère indiqué.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

CHAPITRE N°……….. : NOMBRES COMPLEXES ET NOTATION EX PONENTIELLE.

Exercice n°7 **:** exercice BAC GE GET 1999 sur 5 points .
Le quadripôle représenté ci-dessous est constitué d'un résistor de résistance R exprimée en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en µF.



On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s.

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par : $Z = \dfrac{z_s}{z_e}$.

On admet que : $Z = \dfrac{1}{1 + iRC\omega}$, où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Dans tout l'exercice, on suppose que R = 50 Ω, C = 2 µF et $\omega = \dfrac{1}{100} rad.s^{-1}$.

1. Vérifier que $Z = \dfrac{1}{1+i}$; écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z.
2. Le module de z_s peut-il être le double de z_e ? Justifier la réponse fournie.

3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\dfrac{\pi}{2}$; déterminer alors un argument de z_e.

4. On suppose dans cette question que $z_e = 150\left(-\sqrt{3} + i\right)$.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_e sous la forme exponentielle $re^{i\alpha}$.
b. Déterminer la forme exponentielle du nombre z_s correspondant.
c. Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités. À l'aide d'un compas et d'un rapporteur, placer les points M_e et M_s images respectives des nombres z_e et z_s (laisser les traits de construction).